শান্তিৰাম দাস স্মাৰক চতুৰ্থ বক্তৃতা:

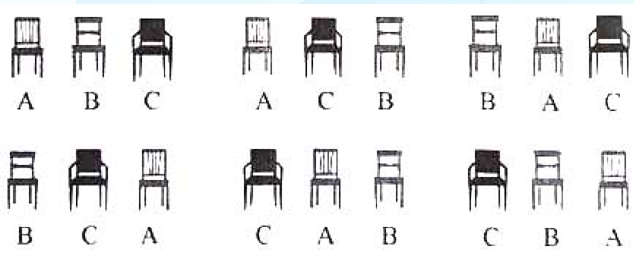
বিন্যাস আৰু জোঁটৰ ব্যৱহাৰিক প্ৰয়োগ আৰু গণিতৰ অন্যান্য শাখাত ইয়াৰ গুৰুত্ব

ড° চন্দ্ৰৰেখা মহন্ত

আজিৰ বক্তৃতাৰ মূল বিষয়-বস্তু হৈছে বিন্যাস আৰু জোঁট। এই বিন্যাস আৰু জোঁট নো কি? সংজ্ঞামতে, কিছুসংখ্যক বস্তুৰ এটা সংগ্ৰহৰ পৰা আটাইবোৰ বা এক নিৰ্দিষ্ট সংখ্যক বস্তু বাছি লৈ এক বিশেষ ক্ৰমত সজোৱা একোটা সাজোনক একোটা বিন্যাস (Permutation) বুলি কোৱা হয়। আৰু, কিছুসংখ্যক বস্তুৰ এটা সংগ্ৰহৰ পৰা আটাইবোৰ বা এক নিৰ্দিষ্ট সংখ্যক বস্তু বাছি লৈ গঠন কৰা একোটা গোটক জোঁট (Combination) বুলি কোৱা হয়।

বিশেষভাৱে উল্লেখ নাথাকিলে সকলো সাজোন একোটা শাৰীত এক বিশেষ ক্ৰমত থকা বুলি ধৰা হয়, আৰু বস্তুবোৰ পুনৰাবৃত্তি নকৰাকৈ বিন্যাস কৰা বুলি ধৰা হয়। আনহাতে, একোটা জোঁটত বস্তুকেইটাৰ থুপটোহে চোৱা হয়, কোনটো ক্ৰমত বস্তুবোৰ সজোৱা আছে সেইটো চোৱা নহয়।

উদাহৰণস্বৰূপে, ধৰি ললোঁ আমাৰ তিনিখন ভিন্নৰঙী চকী আছে– ৰঙা (A), নীলা (B) আৰু সেউজীয়া (C)। এই চকী তিনিখনক একেশাৰীতে তলত দিয়া ছয় ধৰণে সজাব পাৰি:

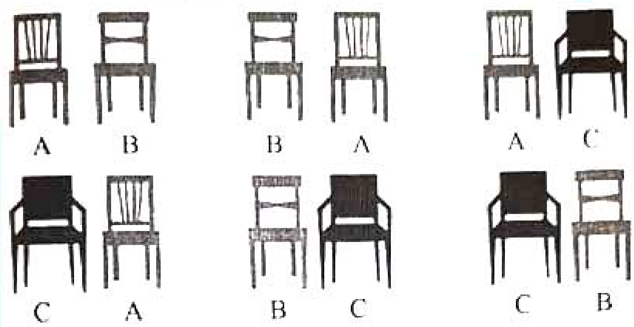


প্ৰতিটো সাজোনতে চকী তিনিখন একোটা বিশেষ ক্ৰমত আছে। এই সাজোনবিলাকৰ প্ৰতিটোৱেই একোটা বিন্যাস। চকী তিনিখনৰ গোটটো এটা জোঁট।

এতিয়া যদি তিনিখন চকীৰ পৰা যিকোনো দুখন বাছি ল'ব লাগে, তেন্তে আমি তলত দিয়া ধৰণে বাছনি কৰিব পাৰোঁ:

ৰঙা নীলা, ৰঙা সেউজীয়া, নীলা সেউজীয়া।

অৰ্থাৎ আমি তিনিটা বেলেগ বেলেগ গোট গঠন কৰিব পাৰোঁ। প্ৰতিটো গোটৰে চকী দুখন তলত দিয়া ধৰণে সজাব পাৰি:



এই সাজোনৰ প্ৰতিটোৱেই একোটা বিন্যাস। গতিকে, এইক্ষেত্ৰত আমি তিনিটা জোঁট আৰু ছয়টা বিন্যাস পাওঁ।

একেদৰেই, যিকোনো তিনিটা অংক, যেনে ১, ২, ৩ ৰে (অংকৰ পুনৰাবৃত্তি নকৰাকৈ) ১২৩, ১৩২, ২১৩, ২৩১, ৩১২, ৩২১ – এই ছয়টা সংখ্যা লিখিব পাৰি। অৰ্থাৎ ছয়টা বিন্যাস পাব পাৰি। এইক্ষেত্ৰত জোঁট মাত্ৰ এটা।

অংক তিনিটাৰ মাজৰ পৰা এবাৰত দুটাকৈ অংক বাছি ল'লে আমি (১, ২), (১, ৩), (২, ৩) – এই তিনিটা জোঁট পাওঁ। আৰু ইয়াৰ প্ৰতিটোৰ পৰা পোৱা দুটাকৈ বিন্যাসেৰে মুঠ ছয়টা বিন্যাস পাওঁ: **১২, ২১, ১৩, ৩১, ২৩, ৩২**।

চাৰিটা অংক, যেনে **১, ২, ৩, ৪** ৰ পৰা একোবাৰত দুটাকৈ বাছি ল'লে (১, ২), (১, ৩), (১, ৪), (২, ৩), (২, ৪), (৩, ৪) – এই ছয়টা জোঁট পোৱাৰ বিপৰীতে অংকৰ পুনৰাবৃত্তি নকৰাকৈ প্ৰতিটো জোঁটৰ পৰা পোৱা মুঠ **১২** টা বিন্যাসেৰে আমি **১২, ২১, ১৩, ৩১, ১৪, ৪১, ২৩, ৩২, ২৪, ৪২, ৩৪, ৪৩** – এই বাৰটা সংখ্যা পাওঁ।

একোবাৰত তিনিটাকৈ বাছি ল'লে (১, ২, ৩), (১, ২, ৪), (১, ৩, ৪), (২, ৩, ৪) – এই চাৰিটা জোঁট পোৱাৰ বিপৰীতে

১২৩, ১২৪, ১৩২, ১৩৪, ১৪২, ১৪৩,
২১৩, ২১৪, ২৩১, ২৩৪, ২৪১, ২৪৩,
৩১২, ৩১৪, ৩২১, ৩২৪, ৩৪১, ৩৪২,
৪১২, ৪১৩, ৪২১, ৪২৩, ৪৩১, ৪৩২,

এই ২৪ টা বিন্যাসেৰে মুঠ ২৪ টা সংখ্যা পাওঁ।

আনহাতে, এবাৰত গোটেইকেইটা অংক ল'লে, এটা মাত্ৰ জোঁট (১, ২, ৩, ৪) পোৱাৰ বিপৰীতে মুঠ ২৪ টা বিন্যাসেৰে

১২৩৪, ১২৪৩, ১৩২৪, ১৩৪২, ১৪২৩, ১৪৩২,
২১৩৪, ২১৪৩, ২৩১৪, ২৩৪১, ২৪১৩, ২৪৩১,
৩১২৪, ৩১৪২, ৩২১৪, ৩২৪১, ৩৪১২, ৩৪২১,
৪১২৩, ৪১৩২, ৪২১৩, ৪২৩১, ৪৩১২, ৪৩২১,

এই ২৪ টা সংখ্যা পাওঁ।

এনেদৰে আগবাঢ়ি গৈ থাকি আমি তলত দিয়া ধৰণৰ তালিকা এখন সাজি ল'ব পাৰোঁ:

মুঠ বস্তুৰ সংখ্যা	একোবাৰত লোৱা বস্তুৰ সংখ্যা	মুঠ জোঁটৰ সংখ্যা	মুঠ বিন্যাসৰ সংখ্যা
১	১	১	১
২	১	২	২
২	২	১	২
৩	১	৩	৩
৩	২	৩	৬
৩	৩	১	৬
৪	১	৪	৪
৪	২	৬	১২
৪	৩	৪	২৪
৪	৪	১	২৪
...	...	...	...

এই তালিকাখন চাই আমি এতিয়া ক'ব পাৰিমনে– n টা ভিন্ন বস্তুৰ পৰা এবাৰত r টা $(r \leq n)$ কৈ বস্তু বাছি ল'লে কিমানটা জোঁট আৰু কিমানটা বিন্যাস পোৱা যাব?

কথাটো নিশ্চয়কৈ ইমান সহজ নহয়।

সেয়েহে, গণিতত সদায় কম কথাৰে কম সময়তে সমস্যা সমাধানৰ বাবে একোটা সূত্ৰ বা তত্ত্ব উদ্ভাৱন কৰিবলৈ চেষ্টা কৰা হয়। গাণিতিক ভাৱে এনে প্ৰশ্ন সমাধানৰ ক্ষেত্ৰত আমাক এটা বিশেষ সূত্ৰই অভাৱনীয়ভাৱে সহায় কৰে। সেইটো হ'ল:

গণনাৰ মৌলিক সূত্ৰ (Fundamental Principle of Counting):

যদি কোনো এটা প্ৰক্ৰিয়া বা কাৰ্য m প্ৰকাৰে সম্পাদন কৰিব পাৰি, আৰু এই m প্ৰকাৰৰ প্ৰতিটোৰ অনুৰূপে এটা দ্বিতীয় প্ৰক্ৰিয়া বা কাৰ্য n প্ৰকাৰে সম্পাদন কৰিব পাৰি, তেন্তে দুয়োটা প্ৰক্ৰিয়া বা কাৰ্য যুটীয়াভাৱে $m \times n$ প্ৰকাৰে সম্পাদন কৰিব পাৰি।

উদাহৰণ স্বৰূপে, ধৰি ললোঁ ৰঙামাটি আৰু গুৱাহাটীৰ মাজত ৬ খন বাছ চলাচল কৰে। কোনোবা এজনে ঠিক কৰিলে যে তেওঁ যিখন বাছত ৰঙামাটিৰ পৰা গুৱাহাটীলৈ যাব সেই একেখন বাছতে ঘূৰি নাহি আন বাছকেইখনৰ যিকোনো এখনত গুৱাহাটীৰ পৰা ৰঙামাটিলৈ ঘূৰি আহিব। ভ্ৰমণৰসিক ব্যক্তিজনে এতিয়া চিন্তা কৰি আছে– পুনৰাবৃত্তি নোহোৱালৈকে তেওঁ এইদৰে কিমান দিন অহা-যোৱা কৰিব পাৰিব?

বন্ধু এজনে তেওঁক ক'লে যে এইদৰে তেওঁ ৩০ দিন অহা যোৱা কৰিব পাৰিব। তেওঁ অলপ আচৰিত হ'ল। বাছ মাত্ৰ ৬ খন। তাতে প্ৰতিদিনে মাত্ৰ ২ খন বাছতহে উঠিব। এনেকৈ ৩০ দিন! বিনা প্ৰমাণে তেওঁ কথাটো মানি ল'বলৈ টান পালে। গতিকে তেওঁ কাগজ-কলম লৈ বহি গল। বাছ কেইখনৰ নামকৰণ কৰি ল'লে– ১, ২, ৩, ৪, ৫, ৬।

প্ৰথমেই তেওঁ ১ নং বাছখনত ৰঙামাটিৰ পৰা গুৱাহাটীলৈ যোৱাটো ঠিক কৰি দেখিলে যে (যোৱা-অহা) কামটো তলত দিয়া ৫ ধৰণে কৰিব পাৰি:

$$(১, ২), (১, ৩), (১, ৪), (১, ৫), (১, ৬)।$$

সেইদৰে বাকী বাছকেইখনৰ ক্ষেত্ৰতো (যোৱা-অহা) কামটো তলত দিয়া ধৰণেৰে কৰিব পাৰি:

(২, ১), (২, ৩), (২, ৪), (২, ৫), (২, ৬);
(৩, ১), (৩, ২), (৩, ৪), (৩, ৫), (৩, ৬);
(৪, ১), (৪, ২), (৪, ৩), (৪, ৫), (৪, ৬);
(৫, ১), (৫, ২), (৫, ৩), (৫, ৪), (৫, ৬);
(৬, ১), (৬, ২), (৬, ৩), (৬, ৪), (৬, ৫)।

অৰ্থাৎ যোৱা কামটো ৬ ধৰণে কৰিব পাৰি, আৰু ইয়াৰ প্ৰতিটোৰ অনুৰূপে অহা কামটো ৫ ধৰণে কৰিব পাৰি। গতিকে, যোৱা-অহা কামটো মুঠ $৬ \times ৫ = ৩০$ ধৰণে কৰিব পাৰি। ভ্ৰমণৰসিক ব্যক্তিজনৰ বুজিবলৈ বাকী নাথাকিল যে বন্ধুজনে গণনাৰ মৌলিক সূত্ৰ প্ৰয়োগ কৰিছিল।

ব্যক্তিজনৰ সৰু ল'ৰাটোৱে কথাটো গম পালে যে দেউতাক বেলেগ বেলেগ বাছত গুৱাহাটীলৈ অহা-যোৱা কৰিব। গতিকে সিয়ো দেউতাকৰ ভ্ৰমণ সংগী হ'ব খুজিলে। দেউতাকেও হ'ব বুলি ক'লে। ল'ৰাটো চতুৰ। সি ক'লে– মই কিন্তু সদায় বেলেগ বেলেগ ড্ৰেছ কৰি যাম। অলপ সময় চিন্তা কৰি দেউতাকে আকৌ হ'ব বুলি ক'লে। সি এইবাৰ দেউতাকক সোঁৱৰাই দিলে যে তাৰ মাত্ৰ তিনিটা ছাৰ্ট আৰু দুটা পেণ্টহে আছে। দেউতাকে এইবাৰৰ বিশেষ চিন্তা নকৰি মাথোঁ ক'লে যে মাত্ৰ ছয়দিনতে তাৰ গোটেই গুৱাহাটীখন ভালকৈ চোৱা হৈ যাব যেতিয়া সি যিকোনো এটা সপ্তাহৰ ছয়দিন গ'লেই হ'ব।

বাঃ! বেলেগ বেলেগ ড্ৰেছ! ছয়দিনৰ ভ্ৰমণ। ছয় সাজ কাপোৰ! আনন্দতে সি জপিয়াবলৈ ধৰিলে আৰু খবৰটো মাকক দিবলৈ লৰ ধৰিলে। দেউতাকে মিচিকিয়াই হাঁহি ভাবিলে– এক গুলীত দুই চিকাৰ, সাপো মৰিল, লাঠিও নাভাগিল।

গণনাৰ মৌলিক সূত্ৰৰ কি যে মহত্ব!

মাকৰ ওচৰৰ পৰা আহি সি ক'লে– "দেউতা, মোৰ ড্ৰেছকেইটা কাইলৈয়ে আনি থ'বা নেকি?"

কাইলৈ কিয়– আজিয়ে– এতিয়াই বুলি কৈ দেউতাকে আলমাৰীৰ পৰা ছাৰ্ট তিনিটা আৰু পেণ্ট দুটা উলিয়াই ছয় সাজ কাপোৰ সাজু কৰি দেখুৱালে এইদৰে–

তেওঁ গণনাৰ মৌলিক সূত্ৰ প্ৰয়োগ কৰিলে।

ল'ৰাটো আচৰিত! কেনেকৈ ইমান সহজে হৈ গ'ল? দেউতাকে ক'লে— "বাবা, গণিতৰ মহিমা— গণিতৰ গৰিমা। গণিত খুউব ভালকৈ পঢ়িবা। অলপ ডাঙৰ হ'লেই সকলো বুজিবা। গণিতৰ সহায়ত আমাৰ দৈনন্দিন জীৱনৰ প্ৰায়বোৰ সমস্যাৰ সমাধান অনায়াসে উলিয়াব পাৰি।"

আমাৰ সমস্যাটো কি আছিল বাৰু?

n সংখ্যক ভিন্ন বস্তুৰ মাজৰ পৰা এবাৰত r সংখ্যক $(r \leq n)$ বস্তু বাছি লৈ কিমানটা বিন্যাস আৰু কিমানটা জোঁট পাব পাৰি? প্ৰথমে আমি মুঠ বিন্যাসৰ সংখ্যা কিমান হ'ব চাওঁ।

আৰম্ভণিতে আলোচনা কৰা উদাহৰণকেইটাৰ পৰা আমি দেখিছোঁ যে— নিৰ্ণেয় বিন্যাসৰ সংখ্যা = r সংখ্যক স্থান n সংখ্যক ভিন্ন বস্তুৰে বিভিন্ন ধৰণে পূৰাব পৰা সংখ্যা। গতিকে, আমি r সংখ্যক খালী স্থানক নামকৰণ কৰি ললোঁ— প্ৰথম, দ্বিতীয়, তৃতীয়,..., r তম স্থান।

এতিয়া, প্ৰথমখন স্থান n প্ৰকাৰে পূৰাব পাৰি। এই n প্ৰকাৰৰ প্ৰতিটোৰ অনুৰূপে দ্বিতীয় খন স্থান $(n-১)$ প্ৰকাৰে পূৰাব পাৰি। গণনাৰ মৌলিক সূত্ৰমতে প্ৰথম আৰু দ্বিতীয় স্থান দুটা যুটীয়াভাৱে $n(n-১)$ প্ৰকাৰে পূৰাব পাৰি। এই $n(n-১)$ প্ৰকাৰৰ প্ৰতিটোৰ অনুৰূপে তৃতীয়খন স্থান $(n-২)$ প্ৰকাৰে পূৰাব পাৰি। গতিকে, গণনাৰ মৌলিক সূত্ৰমতে, প্ৰথম তিনিখন স্থান $n(n-১)(n-২)$ প্ৰকাৰে পূৰাব পাৰি। এইদৰে গণনাৰ

মৌলিক সূত্ৰমতে আগবাঢ়ি গ'লে দেখা যাব যে আটাইকেইখন স্থান যুটীয়াভাৱে $n(n-১)(n-২)\cdots\{n-(r-১)\}$ প্ৰকাৰে পূৰাব পাৰি। গতিকে নিৰ্ণেয় মুঠ বিন্যাসৰ সংখ্যা হ'ব $n(n-1)\cdots(n-r+১)$।

n সংখ্যক ভিন্ন বস্তুৰ মাজৰ পৰা এবাৰত r সংখ্যক $(r \leq n)$ বস্তু বাছি লৈ গঠন কৰিব পৰা মুঠ বিন্যাসৰ সংখ্যাক ${}^nP_r$ ৰে সূচোৱা হয়। গতিকে,

$$^nP_r = n(n-১)(n-২)\cdots(n-r+১).$$

এটা বিশেষ সংকেত ব্যৱহাৰ কৰি ওপৰৰ সূত্ৰটোক অধিক মনোগ্ৰাহী আৰু ফলবন্ত ৰূপত প্ৰকাশ কৰিব পাৰি। সেইটো হৈছে গৌণিক সংকেত (Factorial Notation)। ইয়াক $\lfloor n$ বা $n!$ ৰে সূচোৱা হয়, আৰু ই ১ পৰা n লৈকে স্বাভাৱিক সংখ্যাবোৰৰ গুণফলক বুজায়। অৰ্থাৎ,

$$n! = ১\times২\times৩\times\cdots(n-২)\times(n-১)\times n.$$

আকৌ,

$$\begin{aligned} n! &= n(n-১)! \\ &= n(n-১)\times(n-২)! \\ &= n(n-১)\times(n-২)\times(n-৩)!. \end{aligned}$$

গতিকে, ${}^nP_r$ হ'ব

$$\frac{n\times(n-১)\times\cdots\times(n-r+১)\times\cdots\times৩\times২\times১}{(n\text{-}r)\times\cdots\times৩\times২\times১}$$
$$=\frac{n!}{(n-r)!}.$$

ইয়াত $r=n$ হ'লে, ${}^nP_n = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{n!}{০!}$.

আকৌ ${}^nP_n = n\times(n-১)\times(n-২)\times\cdots৩\times২\times১ = n!$.

গতিকে, $\frac{n!}{০!} = n!$। সেয়েহে $০! = ১$। এইটো এটা অতি দৰকাৰী ফল।

এতিয়া আমি আহোঁ জোঁটৰ সংখ্যালৈ। n সংখ্যক ভিন্ন বস্তুৰ মাজৰ পৰা এবাৰত r সংখ্যক $(r \leq n)$ বস্তু বাছি লৈ গঠন কৰিব পৰা মুঠ জোঁটৰ সংখ্যাক $\binom{n}{r}$ ৰে সূচোৱা হয়। এই $\binom{n}{r}$ ৰ প্ৰতিটো জোঁটতে r সংখ্যক ভিন্ন বস্তু আছে, আৰু এই r সংখ্যক বস্তুক নিজৰ মাজতে ${}^rP_r$ অৰ্থাৎ r ধৰণে সজাব পাৰি। এনেদৰে প্ৰতিটো জোঁটৰে বস্তুবোৰ সজালে মুঠ বিন্যাসৰ সংখ্যা হ'ব $\binom{n}{r}\times r!$। স্বাভাৱিকতে,

$$\binom{n}{r}\times r! = {}^nP_r$$

গতিকে,

$$\begin{aligned} \binom{n}{r} &= \frac{{}^nP_r}{r!} \\ &= \frac{n!}{r!(n-r)!}, \quad r\leq n. \end{aligned}$$

ইয়াত $r=n$ হ'লে, $\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!০!} = ১$।

আন কেইটামান আৱশ্যকীয় ফল:

(i) $\binom{n}{০}=১, \binom{n}{১}=n, \binom{n}{২}=\frac{n(n-১)}{২}$,
(ii) $\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$,
(iii) $\binom{n}{r}+\binom{n}{r-1}=\binom{n+1}{r}$,
(iv) ${}^nP_r + r\times{}^nP_{r-1} = {}^{n+1}P_r$।

বিন্যাস আৰু জোঁটৰ এইখিনি মাত্ৰ সাধাৰণ জ্ঞানেৰে আমি আমাৰ ব্যৱহাৰিক জীৱনত বহুতো সমস্যাৰ সমাধান অনায়াসে কৰিব পাৰোঁ।

কেইটামান সৰু সৰু উদাহৰণ:

(কাৰণ সৰু সৰু সমস্যা সমাধানৰ বিভিন্ন কিটিপ আয়ত্ব কৰিব পাৰিলে অতি সহজে ডাঙৰ আৰু জটিল সমস্যা সমাধানৰ পথ উলিয়াব পাৰি।)

উদাহৰণ ১: এখন বেৰত একেশাৰীতে থকা ৫ টা গজালত বেলেগ বেলেগ ৭ খন ফটো কিমান ধৰণে আঁৰিব পাৰি?

সমাধান: নিৰ্ণেয় মুঠ ধৰণ $= {}^৭P_৫ = ২৫২০$।

উদাহৰণ ২: এখন বিদ্যালয়ত দৈনিক ৬ পিৰিয়ডকৈ শ্ৰেণী পাঠদান হয়। এটা নিৰ্দিষ্ট শ্ৰেণীত ৫ টা বেলেগ বেলেগ বিষয় যদি প্ৰতিদিনেই পঢ়ুৱাব লাগে, তেন্তে কিমান ধৰণে ৰুটিনখন সাজিব পাৰি?

সমাধান: ৬ পিৰিয়ডৰে ৫ টা পিৰিয়ডত ৫ টা বেলেগ বেলেগ বিষয় ${}^৬P_৫$ ধৰণে ভগাই দিব পাৰি। বাকী থকা ১ পিৰিয়ডটোত ৫ টা বিষয়ৰ যিকোনো ১ টা ${}^৫P_১$ ধৰণে দিব পাৰি। গণনাৰ মৌলিক সূত্ৰ মতে, ৰুটিনখন ${}^৬P_৫\times{}^৫P_১$ ধৰণে সাজিব পাৰি। গতিকে মুঠ ৩৬০০ ধৰণে ৰুটিনখন সাজিব পাৰি।

উদাহৰণ ৩: এটা শ্ৰেণীত ৩২ জন ছাত্ৰ-ছাত্ৰী আছে। এখন কৰ্মশালালৈ ইয়াৰে যিকোনো ৪ জনক বাছনি কৰি পঠিয়াব লাগে। কিমান ধৰণে বাছনি কৰিব পাৰি?

সমাধান: মুঠ বাছনিৰ সংখ্যা $= \binom{৩২}{৪} = ৩৫৯৬০$।

উদাহৰণ ৪: এটা দশভুজৰ শীৰ্ষবিন্দুবোৰ সংযোগ কৰি মুঠতে কিমানটা ত্ৰিভুজ পাব পাৰি?

সমাধান: এটা দশভুজৰ শীৰ্ষবিন্দু ১০ টা, আৰু এটা ত্ৰিভুজৰ শীৰ্ষবিন্দু ৩ টা। যিহেতু এটা দশভুজৰ কোনো তিনিটা শীৰ্ষবিন্দুৱেই একৰেখীয় নহয়, গতিকে ১০ টা শীৰ্ষবিন্দুৰ পৰা এবাৰত ৩ টাকৈ বাছনি কৰি পোৱা মুঠ জোঁটৰ সংখ্যাই হ'ব নিৰ্ণেয় ত্ৰিভুজৰ সংখ্যা। গতিকে, নিৰ্ণেয় ত্ৰিভুজৰ সংখ্যা $= \binom{১০}{৩} = ১২০$।

উদাহৰণ ৫: ২৫ জন ক্ৰিকেট খেলুৱৈৰ পৰা এটা ক্ৰিকেট দল বাছনি কৰিব লাগে। ২৫ জনৰ ১০ জন বেটছমেন, ৮ জন ব'লাৰ, ৫ জন অল-ৰাউণ্ডাৰ আৰু ২ জন উইকেট-কীপাৰ। যদিহে দলটোত ৫ জন বেটছমেন, ২ জন ব'লাৰ, ৩ জন অলৰাউণ্ডাৰ আৰু ১ জন উইকেট-কীপাৰ থাকিব লাগে, তেন্তে কিমান ধৰণে দলটো বাছনি কৰিব পাৰি?

সমাধান: ১০ জন বেটছমেনৰ পৰা ৫ জনক $\binom{১০}{৫}$ ধৰণে বাছনি কৰিব পাৰি। ঠিক সেইদৰেই ৮ জন ব'লাৰৰ পৰা ২ জনক $\binom{৮}{২}$ ধৰণে, ৫ জন অল-ৰাউণ্ডাৰৰ পৰা ৩ জনক $\binom{৫}{৩}$ ধৰণে, আৰু ২ জন উইকেট-কীপাৰৰ পৰা ১ জনক $\binom{২}{১}$ ধৰণে বাছনি কৰিব পাৰি। গণনাৰ মৌলিক সূত্ৰমতে, মুঠ বাছনিৰ সংখ্যা হ'ব

$$\binom{১০}{৫} \times \binom{৮}{২} \times \binom{৫}{৩} \times \binom{২}{১}.$$

গতিকে, ১৪১১২০ ধৰণে ক্ৰিকেট দলটো বাছনি কৰিব পাৰি।

উদাহৰণ ৬: এখন প্ৰশ্নকাকতৰ দুটা ভাগ আছে– A আৰু B। A ত ৪ টা প্ৰশ্ন থকাৰ বিপৰীতে B ত ৬ টা প্ৰশ্ন আছে। প্ৰতিটো ভাগৰ পৰা অতি কমেও ২ টা প্ৰশ্ন বাছনি কৰি মুঠ ৭ টা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ কৰিব লাগে। কিমান ধৰণে এই ৭ টা প্ৰশ্ন বাছনি কৰিব পাৰি?

সমাধান: উত্তৰ কৰিব (লিখিব) লগীয়া ৭ টা প্ৰশ্ন তলত দিয়া ধৰণে বাছনি কৰিব পাৰি–

Aৰ পৰা ২ টা আৰু Bৰ পৰা ৫ টা মুঠ $\binom{৪}{২} \times \binom{৬}{৫}$ ধৰণে,

Aৰ পৰা ৩ টা আৰু Bৰ পৰা ৪ টা মুঠ $\binom{৪}{৩} \times \binom{৬}{৪}$ ধৰণে,

Aৰ পৰা ৪ টা আৰু Bৰ পৰা ৩ টা মুঠ $\binom{৪}{৪} \times \binom{৬}{৩}$ ধৰণে।

গতিকে, মুঠ বাছনিৰ সংখ্যা হ'ব

$$\binom{৪}{২} \times \binom{৬}{৫} + \binom{৪}{৩} \times \binom{৬}{৪} + \binom{৪}{৪} \times \binom{৬}{৩} = ১১৬.$$

এনেকুৱা অনেক সমস্যাৰ উদাহৰণ আছে যিবোৰ বিন্যাস আৰু জোঁটৰ সাধাৰণ ধাৰণাৰেই সমাধান কৰিব পাৰি। (সময়ৰ নাটনি হোৱাৰ আশংকাত আমি আৰু বেছি উদাহৰণ দিয়াৰ পৰা বিৰত থাকিলোঁ।)

আৰম্ভণিতেই আমি দেখিছিলোঁ যে যিকোনো ৪ টা অংকৰে (পুনৰাবৃত্তি নকৰাকৈ) ২৪ টা বেলেগ বেলেগ বিন্যাস অৰ্থাৎ ২৪ টা সংখ্যা পাব পাৰি। এতিয়া আমি ক'ব পাৰিম নে ৪ টা অংকৰে (পুনৰাবৃত্তি নকৰাকৈ) গঠিত কিমানটা সংখ্যা আছে?

নিশ্চয় পাৰিম। কাৰণ আমি বিন্যাস জানো। অংক ১০ টা হ'ল ০, ১, ২, ৩, ৪, ৫, ৬, ৭, ৮, ৯। একোবাৰত ইয়াৰে যিকোনো ৪ টা বাছি লৈ পোৱা মুঠ বিন্যাসৰ সংখ্যা ${}^{১০}P_৪$। অৰ্থাৎ এনেকৈ ${}^{১০}P_৪$ টা সংখ্যা পোৱা যাব, আৰু এই ${}^{১০}P_৪$ টা সংখ্যাৰ ভিতৰত সেইবোৰ সংখ্যাও আছে যাৰ হাজাৰৰ ঘৰত ০ থাকিব। সেইবোৰ ৪ টা অংকৰ সংখ্যা নহয়। গতিকে সেইবোৰ বাদ দিব লাগিব।

হাজাৰৰ ঘৰত ০ থকা সংখ্যাবোৰৰ ০ টো সেই স্থানতে স্থিৰ থকাৰ বিপৰীতে বাকী শতক, দহক আৰু এককৰ ঘৰকেইটাত ১, ২, ৩, ৪, ৫, ৬, ৭, ৮, ৯ ৰ যিকোনো ৩ টা অংক যিকোনো ক্ৰমত থাকিব পাৰে। গতিকে, এনেধৰণৰ মুঠ সংখ্যা ${}^{৯}P_৩$। সেয়েহে ৪ টা ভিন্ন অংকৰে গঠিত মুঠ সংখ্যাৰ সংখ্যা ${}^{১০}P_৪ - {}^{৯}P_৩ = ৪৫৩৬$।

যদি অংকৰ পুনৰাবৃত্তি কৰিবলৈ দিয়া হয়, তেন্তে ৪ টা অংকৰে গঠিত কিমানটা সংখ্যা পোৱা যাব? আমি এতিয়ালৈকে বস্তুৰ পুনৰাবৃত্তি নকৰাকৈ কিমান বিন্যাস পাব পাৰি সেই বিষয়েহে আলোচনা কৰিছোঁ। গতিকে এই সমস্যাটোৰ সমাধান অলপ বেলেগ ধৰণেৰে উলিয়াব লাগিব।

প্ৰথমেই আমি লক্ষ্য কৰিছো যে এই সংখ্যাবোৰৰ হাজাৰৰ ঘৰত ০ বহিব নোৱাৰে। অথচ এই স্থানত ১ ৰ পৰা ৯ লৈ যিকোনো এটা অংক বহিব পাৰে। গতিকে হাজাৰৰ ঘৰটোৰ বাবে ৯ প্ৰকাৰৰ বাছনি আছে। বাকী শতক, দহক, আৰু একক— এই ঘৰ তিনিটাৰ বাবে কোনো বাধা নাই। ০ ৰ পৰা ৯ লৈ ১০ টা অংকৰ প্ৰতিটোকে ৩ বাৰ পৰ্যন্ত পুনৰাবৃত্তি কৰি এই স্থান তিনিটা পূৰাব পাৰি। গতিকে শতক, দহক, আৰু একক— এই স্থান তিনিটাৰ বাবে ১০ $\times$ ১০ $\times$ ১০ প্ৰকাৰৰ বাছনি আছে। গণনাৰ

মৌলিক সূত্ৰ অনুসৰি, মুঠ বিন্যাস অৰ্থাৎ মুঠ সংখ্যাৰ পৰিমাণ $৯ \times ১০ \times ১০ \times ১০ = ৯০০০$। অৰ্থাৎ ৪ টা অংকৰে গঠিত ৯০০০ টা সংখ্যা আছে।

এনে ধৰণৰ সমস্যা সমাধানৰ বাবে এই উপপাদ্যটো ব্যৱহাৰ কৰিব পাৰি— n সংখ্যক ভিন্ন বস্তুৰ প্ৰতিটোকে r বাৰ পৰ্যন্ত পুনৰাবৃত্তি কৰিব পাৰিলে মুঠ বিন্যাসৰ সংখ্যা n^r হ'ব।

উদাহৰণ: এখন সভালৈ ৬ গৰাকী ব্যক্তিক আমন্ত্ৰণ জনাব লাগে। নিমন্ত্ৰণী-পত্ৰকেইখন ই-মেইল নাইবা ডাকযোগে নাইবা পত্ৰবাহকৰ যোগেদি পঠিয়াব পাৰি। কিমান ধৰণে নিমন্ত্ৰণী-পত্ৰকেইখন পঠিওৱাৰ ব্যৱস্থা কৰিব পাৰি?

সমাধান: যিহেতু পত্ৰকেইখন ই-মেইল নাইবা ডাকযোগে নাইবা পত্ৰবাহকৰ যোগেদি– ইয়াৰে যিকোনো এটা ব্যৱস্থাৰে পঠিয়াব পাৰি, গতিকে পত্ৰকেইখন $৩^৬$ অৰ্থাৎ ৭২৯ ধৰণে পঠিয়াব পাৰি।

দৈনন্দিন জীৱনত আমি অনেক ৰকমৰ সমস্যাৰ সন্মুখীন হ'বলগীয়া হয়। কেতিয়াবা নানানটা বাধা-বিঘিনি অতিক্ৰম কৰিহে জীৱন-পথত অগ্ৰসৰ হ'ব পাৰি। আন কেতিয়াবা বিশেষ ধৰণৰ কিছুমান আৰোপিত চৰ্ত বা বাধা মানি চলি কাম কৰিব লগা হয়। কেতিয়াবা আমি নিজেও কিছুমান কামত কিছুমান চৰ্ত-আৰোপ কৰি লওঁ। চৰ্ত-আৰোপ কৰোঁতে অৱশ্যে চাব লাগে যাতে কাৰোৰে একো অপকাৰ নহয়। গণিতত এনেধৰণৰ চৰ্ত আৰোপিত সমস্যা আছে। বিভিন্ন ধৰণৰ মূৰ্ত্ত বা বিমূৰ্ত্ত ধাৰণাৰে সমস্যাবোৰৰ সমাধান বিচৰা হয়। বেছি দূৰলৈ নগৈ আমি ইয়াত কেৱল এটা কথাতহে মনোনিৱেশ কৰিম। সেইটো হ'ল– বিন্যাস আৰু জোঁটত বাধা বা চৰ্ত আৰোপিত সমস্যা।

এটা একেবাৰে সৰু সমস্যাৰ কথা কওঁ। সৰু সৰু সমস্যাৰ কথা কোৱাই শ্ৰেয়। সমস্যাটো হ'ল– এটা পুথিভঁৰালত ১০ খন বেলেগ বেলেগ কিতাপ একে শাৰীতে সজাই থ'ব লাগে। ইয়াৰে দুখন আপুৰুগীয়া কিতাপ সদায় লগালগিকৈ ৰাখিব লাগিব। কিমান ধৰণে কিতাপ কেইখন সজাই থ'ব পাৰি?

আপুৰুগীয়া কিতাপ দুখনক এখন বুলি ধৰি ল'লে ৯ খন কিতাপ হ'ব। এই ৯ খন কিতাপক একেশাৰীতে ${}^৯P_৯$ ধৰণে সজাব পাৰি। ইয়াৰে প্ৰতিটো ধৰণৰ অনুৰূপে আপুৰুগীয়া কিতাপ ২ খন নিজৰ মাজতে ${}^২P_২$ ধৰণে সজাব পাৰি। গণনাৰ মৌলিক সূত্ৰ অনুসৰি কিতাপ ১০ খন মুঠ ${}^৯P_৯ \times {}^২P_২ = ৭২৫৭৬০$ ধৰণে সজাব পাৰি।

আন এটা সমস্যা– ১০০ আৰু ১০০০ ৰ মাজত কেইটা যুগ্ম সংখ্যা আছে যদিহে ৫ অংকটো এটা সংখ্যাত থাকিলে ৭ অংকটো সদায় ইয়াৰ সোঁফালে লগালগিকৈ থাকে?

১০০ আৰু ১০০০ ৰ মাজৰ সংখ্যাবোৰ তিনি অংকবিশিষ্ট। যুগ্ম সংখ্যা হ'বলৈ এইবোৰৰ এককৰ ঘৰত ০, ২, ৪, ৬ নাইবা ৮ থাকিব লাগিব। গতিকে এককৰ ঘৰত ৫ আৰু ৭ থাকিব নোৱাৰে। চৰ্তমতে দহকৰ ঘৰতো ৫ থাকিব নোৱাৰে, কাৰণ তেতিয়া এককৰ ঘৰত ৭ বহিব লাগিব। সেয়েহে, ৫ যদি থাকিবই লাগে, তেন্তে ই কেৱল শতকৰ ঘৰত থাকিব। চৰ্তমতেই দহকৰ ঘৰত ৭ বহি যাব। বাকী থকা এককৰ ঘৰটো ০, ২, ৪, ৬, ৮ ৰ যিকোনো এটাৰে পূৰাব লাগিব আৰু এই কাম ${}^৫P_১$ অৰ্থাৎ ৫ ধৰণে কৰিব পাৰি। গতিকে এই ক্ষেত্ৰত মাত্ৰ ৫ টা যুগ্ম সংখ্যা পোৱা যাব।

আনহাতে ৫ অংকটো যদি নাথাকে, তেন্তে শতকৰ ঘৰটো ১, ২, ৩, ৪, ৬, ৭, ৮, ৯ ৰ যিকোনো এটাৰে ${}^৮P_১$ ধৰণে পূৰাব পাৰি। দহকৰ ঘৰটো ০, ১, ২, ৩, ৪, ৬, ৭, ৮, ৯ ৰ যিকোনো এটাৰে ${}^৯P_১$ ধৰণে পূৰোৱাৰ বিপৰীতে এককৰ ঘৰটো ${}^৫P_১$ ধৰণে পূৰাব লাগিব। গণনাৰ মৌলিক সূত্ৰমতে এই ক্ষেত্ৰত পোৱা মুঠ যুগ্ম সংখ্যা হ'ব ${}^৮P_১ \times {}^৯P_১ \times {}^৫P_১$ অৰ্থাৎ ৩৬০ টা।

গতিকে আৰোপিত চৰ্ত মানি চলিলে মুঠ ৩৬৫ টা যুগ্ম সংখ্যা পোৱা যাব।

এনেকুৱা অলেখ সমস্যাৰ কথা আলোচনাৰ মাজলৈ টানি আনিব পাৰি। বাহুল্য নকৰি তলত কেইটামান বিশেষ ধৰণৰ আৰোপিত চৰ্ত সাপেক্ষে পোৱা মুঠ বিন্যাসৰ সংখ্যা উল্লেখ কৰা হ'ল—

n সংখ্যক ভিন্ন বস্তুৰ পৰা এবাৰত r সংখ্যক $(r \leq n)$ বস্তু লৈ কৰা বিন্যাসৰ ক্ষেত্ৰত যদি বিশেষ k সংখ্যক বস্তু নিৰ্দিষ্ট কৰি থোৱা স্থানত বিদ্যমান, তেন্তে মুঠ বিন্যাসৰ সংখ্যা হ'ব ${}^{n-k}P_{r-k}$.

যদি বিশেষ k সংখ্যক বস্তু সদায় থাকে, তেন্তে মুঠ বিন্যাসৰ সংখ্যা হ'ব ${}^{n-k}P_{r-k} \times {}^{r}P_{k}$.

n সংখ্যক ভিন্ন বস্তুৰ পৰা এবাৰত r সংখ্যক $(r \leq n)$ বস্তু লৈ কৰা বিন্যাসৰ ক্ষেত্ৰত যদি বিশেষ k সংখ্যক বস্তু সদায় বাদ দিব লাগে, তেন্তে মুঠ বিন্যাসৰ সংখ্যা হ'ব ${}^{n-k}P_{r-k}$.

এতিয়ালৈকে আমি যিমানবোৰ বস্তুৰ বিন্যাস বা জোঁটৰ কথা আলোচনা কৰিলো, এই আটাইবোৰ বস্তুকে ভিন্ন অৰ্থাৎ পৃথক বুলি ধৰা হৈছে। যদি n সংখ্যক বস্তুৰ p সংখ্যক একে আৰু অইন q

সংখ্যক একে, আৰু বাকী থকা আটাইবোৰ বস্তু ভিন্ন, তেন্তে এই n সংখ্যক বস্তুৰ আটাইবোৰকে লৈ পোৱা মুঠ বিন্যাসৰ সংখ্যা কিমান হ'ব?

ধৰা হওঁক মুঠ বিন্যাসৰ সংখ্যা x. যদি p সংখ্যক আৰু q সংখ্যক একে বস্তুবোৰৰ আটাইবোৰকে সলাই সম্পূৰ্ণ পৃথক পৃথক বস্তু লোৱা হয়, তেন্তে n সংখ্যক বস্তুৰ আটাইবোৰেই ভিন্ন হ'ব। এই ক্ষেত্ৰত আটাইবোৰ বস্তুক লৈ পোৱা মুঠ বিন্যাসৰ সংখ্যা হ'ব $n!$. এতিয়া x সংখ্যক বিন্যাসৰ প্ৰতিটোতে থকা নতুন p সংখ্যক বস্তুক নিজৰ ভিতৰতে সজালে $p!$ সংখ্যক বিন্যাস পোৱা যাব। গতিকে, p সংখ্যক একে বস্তুক নতুন পৃথক বস্তুৰে সলালে মুঠ $x \times p!$ বিন্যাস পোৱা যাব।

আকৌ, এই $x \times p!$ সংখ্যক বিন্যাসৰ প্ৰতিটোতে থকা নতুন q সংখ্যক বস্তুক নিজৰ ভিতৰতে সজালে $q!$ সংখ্যক বিন্যাস পোৱা যাব। এইদৰে, n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুৰ আটাইবোৰকে লৈ পোৱা মুঠ বিন্যাসৰ সংখ্যা হ'ব $x \times p! \times q!$. গতিকে, $x = \dfrac{n!}{p!q!}$.

ইয়াৰ সহায়ত এতিয়া আমি অইন কিছুমান প্ৰশ্নৰ সমিধান দিব পাৰোঁ।

উদাহৰণ: MATHEMATICS শব্দটোত থকা বৰ্ণকেইটা একেশাৰীতে কিমান ধৰণে সজাব পাৰি?

সমাধান: MATHEMATICS শব্দটোত থকা ১১ টা বৰ্ণৰ ২ টা M, ২ টা A, আৰু ২টা T, আৰু বাকীকেইটা ভিন্ন। গতিকে নিৰ্ণেয় বিন্যাসৰ সংখ্যা $\dfrac{১১!}{২!২!২!} = ৪৯৮৯৬০০$।

লগতে আমি আৰু কেইটামান বিন্যাসৰ কথা ক'ব পাৰে। যেনে–

MATHEMATICS শব্দটোত থকা বৰ্ণকেইটা একেশাৰীতে কিমান ধৰণে সজাব পাৰি যদিহে স্বৰবৰ্ণকেইটা সদায় একেলগে ৰখা হয়? এই ক্ষেত্ৰত ৪ টা স্বৰবৰ্ণ A, E, A, I ক এটা বুলি ধৰি ল'লে মুঠ ৪ টা বৰ্ণ পোৱা যাব– (A E A I), M, T, H, M, T, C, S. ইয়াৰে ২ টা M আৰু ২ টা T. গতিকে নতুনকৈ ধৰা এই ৪ টা বৰ্ণৰ আটাইবোৰকে লৈ মুঠ $\dfrac{৮!}{২!২!}$ বিন্যাস পোৱা যাব। আকৌ (A E A I) ক নিজৰ ভিতৰতে সজালে মুঠ $\dfrac{৪!}{২!}$ বিন্যাস পোৱা যাব। গণনাৰ মৌলিক সূত্ৰ অনুসৰি, নিৰ্ণেয় বিন্যাসৰ সংখ্যা হ'ব:

$$\frac{৮!}{২!২!} \times \frac{৪!}{২!} = ১২০৯৬০.$$

MATHEMATICS শব্দটোত থকা বৰ্ণকেইটা একেশাৰীতে কিমান ধৰণে সজাব পাৰি যদিহে স্বৰবৰ্ণকেইটা কেতিয়াও একেলগে নাথাকে?

ওপৰৰ আলোচনাৰ আঁত ধৰি উত্তৰটো এইবাৰ সহজে দিব পাৰি। মুঠ বিন্যাসৰ সংখ্যা হ'ব ৪৯৮৯৬০০ – ১২০৯৬০ = ৪৮৬৮৬৪০।

এই উদাহৰণটো এটা মাত্ৰ নমুনাহে। ইংৰাজী ভাষাত থকা ছাব্বিছটা বৰ্ণৰ দ্বাৰা গঠিত প্ৰায় দুই লাখমান অৰ্থপূৰ্ণ শব্দ আমি অভিধানত দেখিছোঁ। একোবাৰত ১ টা বৰ্ণ, ২ টা বৰ্ণ, ৩ টা বৰ্ণ, ..., ২৬ টা বৰ্ণ লৈ কিমানটা শব্দ (অৰ্থ থাকক বা নাথাকক) গঠন কৰিব পাৰি বাৰু?

সাধাৰণ গণিতত কেইটা অংক? ১০ টা। পুনৰাবৃত্তি কৰাত কোনো বাধা নাথাকিলে এবাৰত ১ টা, ২ টা, ৩ টা, ..., ১০ টাকৈ অংক বাছি লৈ কিমানটা সংখ্যা গঠন কৰিব পাৰি?

ছাত্ৰ-ছাত্ৰীসকলে আজৰি সময়ত হিচাপ এটা কৰি চাব পাৰে। আজৰি সময়ত বিভিন্ন ধৰণৰ খেল-ধেমালি কৰিলে যেনেকৈ শাৰীৰিক উৎকৰ্ষ সাধন হয়, তেনেকৈ গণিতৰ সাঁথৰ, গণিতৰ খেল-ধেমালি আদিয়ে মানসিক উৎকৰ্ষ সাধনত সহায় কৰে। নিয়মিত আৰু শৃংখলাবদ্ধ গণিত চৰ্চাই ব্যক্তিৰ মনত আপোনা-আপুনি শুদ্ধ যুক্তি আৰু শুদ্ধ চিন্তাৰ তীব্ৰতাও বঢ়ায়। কেইদিনমান আগতে নাইজেৰিয়াৰ এজন বাৰ বছৰীয়া ল'ৰাই ৭ ৰে বিভাজ্যতাৰ এক সূত্ৰ বাহিৰ কৰিছে। এটা সংখ্যা ৭ ৰে বিভাজ্য হ'ব যদিহে সংখ্যাটোৰ শেষৰ অংকটোক ৫ ৰে পূৰণ কৰি বাকীকেইটা অংকৰে হৈ থকা সংখ্যাটোৰ লগত যোগ কৰি পোৱা নতুন সংখ্যাটো ৭ ৰে বিভাজ্য হয়।

এবাৰ এখন খেলপথাৰত ১৫ জনী সৰু ছোৱালীয়ে ঘূৰণীয়াকৈ বহি লৈ কিবা খেলি আছিল। হঠাৎ এজনী বুদ্ধিমতী ছোৱালীৰ জানিবলৈ মন গ'ল তেওঁলোকে এইদৰে ঘূৰণীয়াকৈ কিমান ধৰণে বহিব পাৰে। আমি সৰু ছোৱালীজনীক সহায় কৰিব পাৰোঁ নে? গণিতৰ ভাষাত, ১৫ টা ভিন্ন বস্তুক বৃত্তকাৰে সজাব লাগে। কিমান ধৰণে সজাব পাৰি?

এটা সাধাৰণ সূত্ৰ উলিয়াবলৈ ধৰা হওঁক n সংখ্যক ভিন্ন বস্তুক বৃত্তাকাৰে সজাব লাগে। বৃত্তটোৰ যিকোনো এঠাইত ইয়াৰে যিকোনো এটা বস্তু স্থিৰ কৰি লৈ বাকী $n-১$ টা বস্তুক স্থিৰ কৰি লোৱা বস্তুটো সাপেক্ষে $(n-১)!$ ধৰণে সজাব পাৰি। গতিকে n সংখ্যক ভিন্ন বস্তুক বৃত্তাকাৰে সজালে মুঠ বিন্যাসৰ সংখ্যা হ'ব $(n-১)!$. সাজোনবোৰ যদি ঘড়ীৰ কাটাৰ দিশে বা বিপৰীতে বুলি

কোনো কথা নাই, তেন্তে মুঠ বিন্যাসৰ সংখ্যা হ’ব $\dfrac{(n-১)!}{২}$.

গতিকে, ১৫ জনী ছোৱালীয়ে বৃত্তাকাৰে মুঠ ১৪! ধৰণে বহিব পাৰে। ($১৪! = ৮৭১৭৮২৯১২০০$, সংখ্যাটো বহু ডাঙৰ। বিশ্বাসযোগ্য হোৱা নাই যদি কম সংখ্যক ভিন্ন বস্তুক বৃত্তাকাৰে সজাই প্রমাণ সাব্যস্ত কৰি চাব পাৰি।)

এতিয়া সৰু ছোৱালীজনীয়ে তেওঁৰ ১৪ গৰাকী বান্ধৱীক এখন ঘূৰণীয়া টেবুলৰ চাৰিওফালে মুঠ ১৩! ধৰণে বহুৱাই মিঠাই খুৱাব পাৰে। আনহাতে, তেওঁৰ যদি মাথোঁ ১৪ টাহে বেলেগ বেলেগ ৰঙৰ মণি আছে তেন্তে মুঠ $\dfrac{১৩!}{২}$ ধৰণৰ মালা গুঠিব পাৰে। (মুঠ মালাৰ সংখ্যা হ’ব ৩১১৩৫১০৪০০।)

ধৰি ললোঁ, বান্ধৱী ১৪ গৰাকীয়ে এখন দীঘলীয়া টেবুলৰ দুয়োকাষে মুখামুখিকৈ বহি কথা পাতিব খুজিছে। টেবুলখনৰ দুয়োকাষে ৭ খনকৈ চকী আছে। ৪ গৰাকীয়ে টেবুলখনৰ সোঁকাষে আৰু আন ২ গৰাকীয়ে টেবুলখনৰ বাঁওকাষে বহিব খুজিছে। বাকী ৪ গৰাকীৰ তেনে কোনো আপত্তি নাই। কিমান ধৰণেৰে তেওঁলোকক বহুৱাব পাৰি?

প্রথমে, সোঁকাষে বহিব খোজা ৪ গৰাকী আৰু বাঁওকাষে বহিব খোজা ২ গৰাকীক একাষৰীয়া কৰি লৈ বাকী থকা ৮ গৰাকীৰ পৰা সোঁকাষৰ বাবে ৩ গৰাকী $\binom{৮}{৩}$ ধৰণে আৰু বাঁওকাষৰ বাবে বাকী ৫ গৰাকীৰ পৰা ৫ গৰাকীক $\binom{৫}{৫}$ ধৰণে বাছনি কৰি ল’ব পাৰি। এতিয়া প্রতিটো কাষৰে ৭ গৰাকীক নিজৰ মাজতে ৭! ধৰণে বহুৱাব পাৰি। গতিকে বান্ধৱী কেইগৰাকীক মুঠ $\binom{৮}{৩}\times\binom{৫}{৫}\times(৭!)^{২} = ১৪২২৪৮৯৬০০$ ধৰণে বহুৱাব পাৰি।

দৈনন্দিন জীৱনত বিন্যাস আৰু জোঁটৰ ব্যৱহাৰিক প্রয়োগ কিমান ইতিমধ্যে আমি অনুমান কৰিব পাৰিছোঁ। এতিয়া আহোঁ গণিতৰ অন্যান্য শাখাত ইয়াৰ গুৰুত্বৰ প্রসংগলৈ। গণিত বিষয়টি বটবৃক্ষৰ দৰে। ইয়াৰ শাখা-প্রশাখা বহুত। বটবৃক্ষৰ দৰেই ইয়াৰ প্রসাৰ হ’বই লাগিছে আৰু বিভিন্ন শাখা-প্রশাখাবোৰ ইটো-সিটোৰ লগত সংযোজিত হৈ থাকি বিস্তৃতি লাভ কৰিছে।

গণিতৰ প্রতিটো শাখাতে ক’ৰবাত নহয় ক’ৰবাত বিন্যাস আৰু জোঁটৰ প্রয়োগ হৈছে আৰু ইয়াৰ প্রয়োগে শাখাবোৰক নতুন মাত্রা প্রদান কৰিছে। বৰ্তমান কম্পিউটাৰৰ যুগত বিন্যাস আৰু জোঁটে অধিক গুৰুত্ব পাইছে আৰু নিত্য নতুন সমস্যাবোৰৰ সমাধানত গুৰুত্বপূর্ণ ভূমিকা লৈছে। বিশেষকৈ, জ্যামিতি, সম্ভাৱিতা তত্ত্ব, পৰিসংখ্যা বিজ্ঞান, কম্পিউটাৰ বিজ্ঞান, গ্ৰাফ থিয়ৰী, এলজেব্ৰা, ট’প’লজী, অপাৰেশ্বন ৰিচাৰ্চ, আদিৰ দৰে শাখাবোৰৰ বৃদ্ধি আৰু ক্রমবিকাশত বিন্যাস আৰু জোঁটে লোৱা গুৰুত্বপূর্ণ ভূমিকা তবধ মানিবলগীয়া। সিবোৰৰ অৱতাৰণা নকৰি আমি মাত্র কেইটামান শাখাত ইয়াৰ ভূমিকা আলোচনা কৰিবলৈ প্রয়াস কৰিম।

যিজন কৃতবিদ্য গণিতজ্ঞ নমস্য ব্যক্তিৰ সোঁৱৰণত এই বক্তৃতামালাৰ আয়োজন কৰা হৈছে তেখেতৰ পুণ্য স্মৃতিত একাঁজলি শ্রদ্ধা জনাই আমি প্রথমে জ্যামিতিৰে আৰম্ভ কৰিব খুজিছোঁ। জ্যামিতিৰে আকৌ বহুত প্রশাখা– ইউক্লিডীয় জ্যামিতি, অনাইউক্লিডীয় জ্যামিতি, স্থানাংক জ্যামিতি, প্রক্ষেপীয় জ্যামিতি, ৰীমানীয় জ্যামিতি, উপবৃত্তীয় জ্যামিতি, পৰাবৃত্তীয় জ্যামিতি, ইত্যাদি। ইয়াত ইউক্লিডীয় জ্যামিতিৰে দুটামান উদাহৰণ লোৱা হ’ল—

উদাহৰণ ১: এটা বৃত্তৰ যিকোনো ৩০ টা বিন্দুৰ মাজেদি কেইডাল জ্যা টানিব পাৰি?

সমাধান: বৃত্তৰ যিকোনো ২ টা বিন্দু সংযোগ কৰি এডাল জ্যা পাব পাৰি। গতিকে, নির্ণেয় জ্যাৰ সংখ্যা $\binom{৩০}{২} = ৪৩৫$।

উদাহৰণ ২: এখন সমতলত m সংখ্যক সমান্তৰাল ৰেখাক আন n সংখ্যক সমান্তৰাল ৰেখাই ছেদ কৰিলে কিমানটা সামান্তৰিকৰ সৃষ্টি হ’ব?

সমাধান: সামান্তৰিকৰ বিপৰীত বাহুবোৰ সমান আৰু সমান্তৰাল। গতিকে যিকোনো ২ ডাল সমান্তৰাল ৰেখাই আন যিকোনো ২ ডাল সমান্তৰাল ৰেখাক ছেদ কৰিলেই একোটা সামান্তৰিকৰ সৃষ্টি হ’ব। এতিয়া, m সংখ্যক সমান্তৰাল ৰেখাৰ পৰা ২ ডাল $\binom{m}{২}$ ধৰণে আৰু n সংখ্যক সমান্তৰাল ৰেখাৰ পৰা ২ ডাল $\binom{n}{২}$ ধৰণে কৰিব পাৰি। গতিকে, উৎপন্ন হোৱা মুঠ সামান্তৰিকৰ সংখ্যা $\binom{m}{২}\times\binom{n}{২}$।

যেনে, ৭ ডাল সমান্তৰাল ৰেখাক আন ৫ ডাল সমান্তৰাল ৰেখাই ছেদ কৰিলে মুঠ ২১০ টা সামান্তৰিক উৎপন্ন হ’ব।

উদাহৰণ ৩: n বাহুবিশিষ্ট এটা বহুভুজৰ কেইডাল কর্ণ থাকে?

সমাধান: n বাহুবিশিষ্ট এটা বহুভুজৰ n টা শীর্ষবিন্দু আছে আৰু ইয়াৰে কোনো তিনিটাই একৰেখীয় নহয়। গতিকে দুটা শীর্ষ বিন্দু সংযোগ কৰিলে হয় এটা বাহু নাইবা এডাল কর্ণ পোৱা যাব। সেয়েহে, n বাহুবিশিষ্ট এটা বহুভুজৰ মুঠ কর্ণৰ সংখ্যা $\binom{n}{২} - n = \dfrac{n(n-৩)}{২}$।

উদাহৰণ ৪: এখন সমতলত ১৫ টা বিন্দু আছে। ইয়াৰে ৫ টা

একৰেখীয় আৰু বাকী কোনো তিনিটা বিন্দুৰেই একৰেখীয় নহয়। বিন্দুবোৰ সংযোগ কৰি পোৱা সৰলৰেখাৰ সংখ্যা কিমান?

সমাধান: যিকোনো ২ টা বিন্দু সংযোগ কৰিয়ে এডাল ৰেখা পোৱা যায়। ১৫ টা বিন্দুৰ যদি কোনো তিনিটাই একৰেখীয় নহয়, তেন্তে মুঠ $\binom{১৫}{২}$ ডাল সৰলৰেখা পোৱা গ'লহেঁতেন। যিহেতু ইয়াৰে ৫ টা বিন্দু একৰেখীয়, গতিকে এই ৫ বিন্দু সংযোগ কৰিলে $\binom{৫}{২}$ ডাল ৰেখাৰ ঠাইত মাত্ৰ ১ ডাল ৰেখা পোৱা যাব। গতিকে নিৰ্ণেয় মুঠ ৰেখা হ'ব $\binom{১৫}{২} - (\binom{৫}{২} - ১) = ৯৬$।

সম্ভাৱিতা তত্ত্বতো বিন্যাস আৰু জোঁটৰ বহুল প্ৰয়োগ আছে।

উদাহৰণ ১: ১০ খন বেলেগ বেলেগ কিতাপ একেশাৰীতে সজাই থ'ব লাগে। তাৰে ২ খন কিতাপ একেলগে থকাৰ সম্ভাৱিতা কিমান?

সমাধান: ১০ খন বেলেগ বেলেগ কিতাপ একেশাৰীতে মুঠ ${}^{১০}P_{১০}$ ধৰণে সজাব পাৰি। আলোচনা কালত ইতিমধ্যেই আমি পাই আহিছোঁ যে ১০ খন কিতাপৰ ২ খন নিৰ্দিষ্ট কিতাপ একেলগে মুঠ ${}^{৯}P_{৯} \times {}^{২}P_{২}$ ধৰণে থাকিব পাৰে। গতিকে, ২ খন নিৰ্দিষ্ট কিতাপ একেলগে থকাৰ সম্ভাৱিতা হ'ব

$$\frac{{}^{৯}P_{৯} \times {}^{২}P_{২}}{{}^{১০}P_{১০}} = \frac{১}{৫}.$$

লগতে আমি সেই নিৰ্দিষ্ট কিতাপ ২ খন একেলগে নথকাৰ সম্ভাৱিতাও পালোঁ, আৰু এই সম্ভাৱিতা $১ - \frac{১}{৫}$ অৰ্থাৎ $\frac{৪}{৫}$।

উদাহৰণ ২: এটা বাকচত ৬ টা ৰঙা, ৪ টা নীলা, আৰু ৫ টা হালধীয়া বল আছে। এজন ল'ৰাই একো নোচোৱাকৈয়ে তাৰ পৰা ৪ টা বল উলিয়াই আনিলে। এই ৪ টা বলত প্ৰতিটো ৰঙৰে অন্ততঃ ১ টাকৈ বল থকাৰ সম্ভাৱিতা কিমান?

সমাধান: বাকচত থকা মুঠ বলৰ সংখ্যা ৬+৪+৫=১৫। এই ১৫ টা বলৰে যিকোনো ৪ টা $\binom{১৫}{৪}$ ধৰণে উলিয়াই আনিব পাৰি। যদি ল'ৰাজনে উলিওৱা ৪ টা বলত প্ৰতিটো ৰঙৰে অন্ততঃ ১ টাকৈ বল থাকিব লাগে, তেন্তে বল ৪ টা তলত দিয়া ধৰণৰ হ'ব:

১ টা ৰঙা, ১ টা নীলা, ২ টা হালধীয়া;

১ টা ৰঙা, ২ টা নীলা, ১ টা হালধীয়া;

২ টা ৰঙা, ১ টা নীলা, ১ টা হালধীয়া;

আৰু এই ঘটনা তিনিটা ক্ৰমে $\binom{৬}{১} \times \binom{৪}{১} \times \binom{৫}{২}$, $\binom{৬}{১} \times \binom{৪}{২} \times \binom{৫}{১}$, $\binom{৬}{২} \times \binom{৪}{১} \times \binom{৫}{১}$ ধৰণে সংঘটিত হ'ব। সেয়েহে, নিৰ্ণেয় সম্ভাৱিতা হ'ব

$$\frac{\binom{৬}{১} \times \binom{৪}{১} \times \binom{৫}{২}}{\binom{১৫}{৪}} + \frac{\binom{৬}{১} \times \binom{৪}{২} \times \binom{৫}{১}}{\binom{১৫}{৪}} + \frac{\binom{৬}{২} \times \binom{৪}{১} \times \binom{৫}{১}}{\binom{১৫}{৪}}$$

অৰ্থাৎ $\frac{৪৮}{৯১}$।

সম্ভাৱিতা তত্ত্ব পৰিসংখ্যা বিজ্ঞানৰ ভিত্তিস্বৰূপ। ব্লেইজ পাস্কেল (Blaise Pascal, ১৬২৩ - ১৬৬২) নামৰ এজন বিখ্যাত গণিতজ্ঞই তেওঁৰ এজন বন্ধুৰ অনুৰোধত জুৱাখেলৰ কেতবোৰ প্ৰশ্নৰ উত্তৰ বিচাৰোঁতেই সম্ভাৱিতা তত্ত্বৰ বীজ অংকুৰিত হৈছিল।

পাস্কেলৰ বিখ্যাত ত্ৰিভুজ 'পাস্কেল ত্ৰিভুজ'ৰ সহায়ত সম্ভাৱিতা তত্ত্বৰ বহু প্ৰশ্ন সমিধান অতি সহজে দিব পাৰি।

১
১ ১
১ ২ ১
১ ৩ ৩ ১
১ ৪ ৬ ৪ ১
১ ৫ ১০ ১০ ৫ ১
… … … … … … …

পাস্কেল ত্ৰিভুজ

পাস্কেল ত্ৰিভুজৰ লগত জোঁটৰো নিবিড় সম্পৰ্ক। এই ত্ৰিভুজৰ $(n+১)$ তম শাৰীত থকা সংখ্যাবোৰ আৰু দ্বিপদ ৰাশিৰ n তম $(n = ১, ২, ৩, \ldots)$ ঘাতৰ বিস্তৃতিৰ সহগবোৰ একে। যেনে,

$$\begin{aligned}
(a+b)^২ &= ১.a^২ + ২.ab + ১.b^২ \\
&= \binom{২}{০}a^২ + \binom{২}{১}a^{২-১}b^১ + \binom{২}{২}b^২. \\
(a+b)^৩ &= ১.a^৩ + ৩.a^২b + ৩.ab^২ + ১.b^৩ \\
&= \binom{৩}{০}a^৩ + \binom{৩}{১}a^{৩-১}b^১ + \binom{৩}{২}a^{৩-২}b^২ + \binom{৩}{৩}b^৩. \\
(a+b)^n &= \binom{n}{০}a^n + \cdots + \binom{n}{r}a^{n-r}b^r + \cdots + \binom{n}{n}b^n.
\end{aligned}$$

ইয়াত $a = ১, b = ১$ বহুৱালে পাম:

$$\binom{n}{১} + \binom{n}{২} + \cdots + \binom{n}{n} = ২^n - ১.$$

ইয়াৰ অৰ্থ এনেকৈও দিব পাৰি— n সংখ্যক ভিন্ন বস্তুৰ পৰা এবাৰত ১ টাকৈ, ২ টাকৈ, ৩ টাকৈ, … n টাকৈ বস্তু বাছি লৈ গঠন কৰিব পৰা মুঠ জোঁটৰ সংখ্যা $২^n - ১$। এই ফলাফলটোৰ প্ৰয়োগে বিভিন্ন ক্ষেত্ৰত বহু হিচাপ-নিকাচ সহজ কৰি তোলে।

এটোপ দুটোপ কৰি বৰষুণৰ পানী পৰি একোখন বহল সাগৰ হোৱাৰ দৰেই সৰু সৰু গাণিতিক ধাৰণাবোৰক (মূৰ্ত্ত বা বিমূৰ্ত্ত) সাৰথি কৰিয়ে গণিতৰ বিশাল জগতখন হৈছেগৈ। বিমূৰ্ত্ত ধাৰণাৰ প্ৰসংগ টানি ননাকৈয়ে কেৱল মূৰ্ত্ত ধাৰণাৰেই আমি গণিত জগতৰ এক ক্ষুদ্ৰ পৰিসৰতে ক্ষন্তেক বিচৰণ কৰাৰ প্ৰয়াস কৰিলোঁ। আশাকৰো ছাত্ৰ-ছাত্ৰীসকল উপকৃত হৈছে।

শান্তিৰাম দাস বক্তৃতামালাৰ চতুৰ্থটো বক্তৃতা প্ৰদানত অংশ ল'বলৈ দি আমাক কৃতাৰ্থ কৰাৰ বাবে উদ্যোক্তাসকললৈ পুনৰবাৰ কৃতজ্ঞতা জনাই এই বক্তৃতা ইমানতে সামৰিলোঁ।

ধন্যবাদ

জয়তু অসম গণিত শিক্ষায়তন

ড° চন্দ্ৰৰেখা মহন্তৰ জন্মস্থান যোৰহাট জিলাৰ বৰহোলাত। বৰহোলাতে স্কুলীয়া শিক্ষা সাং কৰি বৰহোলা উচ্চতৰ মাধ্যমিক বিদ্যালয়ৰ পৰা ১৯৭৮ চনত হাইস্কুল শিক্ষান্ত পৰীক্ষাত অৱতীৰ্ণ হৈ অসমৰ সকলো ছাত্ৰী পৰীক্ষাৰ্থীৰ ভিতৰত প্ৰথম স্থান লাভ কৰি কটন মহাবিদ্যালয়ত প্ৰাক্-বিশ্ববিদ্যালয় (বিজ্ঞান) শাখাত নাম ভৰ্তি কৰে। প্ৰাক্-বিশ্ববিদ্যালয় (বৰ্তমানৰ উচ্চতৰ মাধ্যমিক পৰ্যায়) শিক্ষান্ত পৰীক্ষাত সাধাৰণ গণিত আৰু উচ্চগণিত দুয়োটা বিষয়তে সৰ্বোচ্চ নম্বৰ লাভ কৰি চতুৰ্থ স্থান অধিকাৰ কৰে। কটন মহাবিদ্যালয়তে গণিতক সন্মান বিষয় হিচাপে লৈ স্নাতক পাঠ্যক্ৰম সম্পূৰ্ণ কৰে আৰু প্ৰথম শ্ৰেণীৰ প্ৰথম স্থান অধিকাৰ কৰাৰ লগতে গুৱাহাটী বিশ্ববিদ্যালয়ৰ ১৯৮৩ চনৰ 'শ্ৰেষ্ঠ স্নাতক' (Best Graduate) সন্মান লাভ কৰে। ইয়াৰ পিছত তেওঁ উচ্চ শিক্ষা আহৰণৰ বাবে দিল্লীলৈ যায় আৰু সেই সময়ত গুৱাহাটী বিশ্ববিদ্যালয় আৰু দিল্লী বিশ্ববিদ্যালয়ৰ অধীনত স্নাতক পাঠ্যক্ৰম ক্ৰমে দুবছৰীয়া আৰু তিনিবছৰীয়া হোৱা হেতুকে এবছৰীয়া এক বিশেষ পাঠ্যক্ৰমত (স্নাতক তৃতীয় বাৰ্ষিকৰ সমপৰ্যায়) সুখ্যাতিৰে উত্তীৰ্ণ হৈ দিল্লী বিশ্ববিদ্যালয়ত গণিতৰ স্নাতকোত্তৰ পাঠ্যক্ৰমত নাম ভৰ্তি কৰাবলৈ সক্ষম হয়। দিল্লী বিশ্ববিদ্যালয়ৰ কিৰোৰী মল মহাবিদ্যালয়ৰ পৰা ১৯৮৬ চনত স্নাতকোত্তৰ পৰীক্ষাত প্ৰথম শ্ৰেণীৰ প্ৰথম স্থান লাভ কৰাৰ পাছত তেওঁৰ বিদেশত গৱেষণা কৰাৰ সুযোগ মিলিছিল। কিন্তু পিতৃৰ অকাল বিয়োগ ঘটাত অসমত গণিত শিক্ষাৰ হকে কাম কৰাৰ হেঁপাহেৰে অসমলৈ ঢাপলি মেলে। সেই উদ্দেশ্য আগত ৰাখি ১৯৮৬ চনত গুৱাহাটীৰ সন্দিকৈ ছোৱালী মহাবিদ্যালয়ৰ গণিত বিভাগত যোগদান কৰে আৰু ১৯৮৮ চনত কটন মহাবিদ্যালয়ৰ গণিত বিভাগত যোগদান কৰে।

অধ্যাপনাৰ সমান্তৰালভাৱে ড° মহন্তই বিশিষ্ট পদাৰ্থ বিজ্ঞানী তথা কটন মহাবিদ্যালয়ৰ অধ্যক্ষ ড° কমলেন্দু দেৱ ক্ৰোড়ী আৰু বিশিষ্ট গণিতিবিদ তথা কটন মহাবিদ্যালয়ৰ গণিত বিভাগৰ মুৰব্বী অধ্যাপক ড° তাৰকেশ্বৰ চৌধুৰীৰ তত্ত্বাৱধানত গৱেষণাৰ কাম চলায়, আৰু Physical Review D, General Relativity and Gravitation, Canadian Journal of Physics আদি জাৰ্ণেলত গৱেষণা-পত্ৰ প্ৰকাশ কৰিবলৈ সক্ষম হয়। অধ্যাপক ড° তাৰকেশ্বৰ চৌধুৰীদেৱৰ তত্ত্বাৱধানত 'Some exact solutions in curved space-times of $n \geq 4$ dimensions' শীৰ্ষক গৱেষণা-গ্ৰন্থৰ বাবে ১৯৯৭ চনত গুৱাহাটী বিশ্ববিদ্যালয়ৰ পৰা তেওঁ পিএইচডি ডিগ্ৰী লাভ কৰে।

সুদীৰ্ঘ ২৮ বছৰ কাল কটন মহাবিদ্যালয়ত (বৰ্তমান কটন বিশ্ববিদ্যালয়) অধ্যাপনা কৰাৰ পাছত ২০১৬ চনৰ পৰা ড° মহন্তই গুৱাহাটী বিশ্ববিদ্যালয়ৰ গণিত বিভাগত অধ্যাপনা কৰি আছে। কটন বিশ্ববিদ্যালয় আৰু গুৱাহাটী বিশ্ববিদ্যালয় – এই দুয়োখন বিশ্ববিদ্যালয়ৰে তেওঁ স্বীকৃতিপ্ৰাপ্ত গৱেষক তত্ত্বাৱধায়ক। ইতিমধ্যে তেওঁৰ তত্ত্বাৱধানত এগৰাকীয়ে এমফিল আৰু চাৰিগৰাকীয়ে পিএইচডি ডিগ্ৰী লাভ কৰিছে। আন চাৰিগৰাকী গৱেষকে তেওঁৰ তত্ত্বাৱধানত কাম চলাই আছে। ড° মহন্তৰ গৱেষণাৰ ক্ষেত্ৰ – আপেক্ষিকতাবাদ, ব্ৰহ্মাণ্ড বিজ্ঞান, আৰু গণিত শিক্ষা (Mathematics Education)।

বেহেলাৰ বাদ্য বিশাৰদ ড° মহন্তই গণিত চৰ্চাৰ মাজে মাজে সংগীতৰো চৰ্চা অব্যাহত ৰাখিছে। বিভিন্ন গৱেষণামূলক প্ৰবন্ধৰ উপৰি মাজে-মধ্যে বাতৰি-কাকত, আলোচনী আদিত তেওঁ লিখা-মেলাও কৰে। ড° মহন্ত অসম গণিত শিক্ষায়তনৰ বৰ্তমানৰ কাৰ্যবাহী সদস্য আৰু 'গণিত বিকাশ'ৰ প্ৰাক্তন সম্পাদক।

['অসম গণিত শিক্ষায়তন'-এ আয়োজন কৰা 'শান্তিৰাম দাস স্মাৰক বাৰ্ষিক বক্তৃতামালা'ৰ চতুৰ্থটি বক্তৃতানুষ্ঠান মঙ্গলদৈৰ পশ্চিম ৰঙামটি উচ্চতৰ মাধ্যমিক বিদ্যালয়ত ২০১৯ চনৰ ২৯ নৱেম্বৰত অনুষ্ঠিত হয়। 'গণিত বিকাশ'ত প্ৰকাশৰ উদ্দেশ্যে বক্তৃতাটিৰ দুই-এঠাইত অতি সামান্য সম্পাদনা কৰা হৈছে, আৰু উদাহৰণসমূহত থকা মান নিৰ্ণয়ৰ সাধাৰণ হৰণ-পূৰণসমূহ আঁতৰাই সেইসমূহ ছাত্ৰ-ছাত্ৰীৰ গৃহকাৰ্য হিচাপে এৰা হৈছে। – সম্পাদক।]