ক’লাৎজ অনুমান

প্ৰাঞ্জল তালুকদাৰ

প্ৰাক্তন ছাত্ৰ, গণিতবিজ্ঞান বিভাগ, তেজপুৰ বিশ্ববিদ্যালয়

আমি সকলোৱে কেতিয়াবা এনেকুৱা কিছুমান প্ৰশ্নৰ সন্মুখীন হ’বলগীয়া হয়, য’ত সেই প্ৰসংগটোৰ বিষয়ে পূৰ্বৱৰ্তী কোনো তথ্য নাথাকিলে উত্তৰ দিবলৈ আমি কেৱল এটাই কাম কৰিব পাৰোঁ, সেয়া হ’ল অনুমান। বোধকৰোঁ, Conjecture শব্দটোৰ নিকটতম প্ৰতিশব্দও হৈছে অনুমান। অৱশ্যে গণিতত Conjecture বুলি ক’লে যিকোনো যাদৃচ্ছিক অনুমানতকৈ (wild or random guess) সুচিন্তিত অনুমানৰ (wise guess) কথাহে বুজোৱা হয়। Conjecture বুলি ক’লে এনে কিছুমান statement/conclusion/proposition বুজোৱা হয়, যিসমূহ দেখাত সঁচা যেন লাগে অথচ ইয়াৰ কোনো অকাট্য প্ৰমাণ পোৱা হোৱা নাই। পুৰণি সময়ৰ পৰাই বহুকেইটা বিখ্যাত Conjectureৰ উপস্থিতিয়ে গণিতৰ পঢ়ুৱৈ আৰু চৰ্চাকাৰীসকলক নতুন নতুন অন্বেষণৰ বাটত ব্যস্ত আৰু ৰোমাঞ্চিত কৰি ৰাখিছে। ভাল অনুমান একোটাই এতিয়ালৈ অজ্ঞাত কথাসমূহৰ বিষয়ে পোনাই দি গণিতক আগুৱাই নি থাকে, খুব সম্ভৱ অন্য এখন গাণিতিক জগতলৈ। সমাধান বা প্ৰমাণ বিচাৰি পোৱাৰ পাছত অনুমানসমূহ সলনি হয় উপপাদ্যলৈ। উদাহৰণস্বৰূপে, ফাৰ্মাৰ শেষ উপপাদ্য, চাৰি ৰঙৰ উপপাদ্য, আদি। আনহাতে, কিছুমান ধ্ৰুপদী অনুমান এতিয়াও ৰৈ আছে সমাধানবিহীনভাৱে। উদাহৰণস্বৰূপে, ৰিম্যান প্ৰকল্প (Riemann hypothesis), গোল্ডব্যাখৰ অনুমান (Goldbach’s conjecture), ইত্যাদি। এই অনুমানসমূহৰ সপক্ষে বা বিপক্ষে কিবা ফলাফল, সমাধান বা প্ৰমাণ দিব পৰাজনলৈ ৰৈ আছে খ্যাতি, যশস্যা, পুৰস্কাৰ আদি, আৰু আগ্ৰহী শিকাৰুসকলৰ কাৰণে হয়তো আছে একো একোখন অনাৱিষ্কৃত গাণিতিক উদ্যান।

এই প্ৰবন্ধটোৰ আলোচ্য বিষয় হ’ল তেনেকুৱা এটা অনুমান, যি ক’লাৎজ অনুমান (Collatz Conjecture) নামেৰে প্ৰসিদ্ধ। জাৰ্মান গণিতজ্ঞ ল’থাৰ ক’লাৎজে (Lothar Collatz), নিজৰ ২৭ বছৰ বয়সত, অৰ্থাৎ ১৯৩৭ চনত আগবঢ়োৱা এই অনুমানটো ‘$৩n + ১$ অনুমান’ অথবা ‘চাৰাকিজ সমস্যা (Syracuse problem)’ বুলিও জনাজাত। গণিতৰ বিশাল ক্ষেত্ৰখনত এতিয়ালৈ সমাধান নোহোৱা বুনিয়াদী অনুমানসমূহৰ ভিতৰত ক’লাৎজ অনুমান অন্যতম। এই অনুমানটোৱে ইতিমধ্যে বিশ্বৰ পেছাদাৰী আৰু অপেছাদাৰী গণিতজ্ঞসকলৰ এক বুজন পৰিমাণৰ সময় খৰছ কৰি পেলাইছে।

ক’লাৎজ অনুমানৰ মূল কথাখিনিলৈ যোৱাৰ আগতে আমি অনুমানটোৰ সৈতে জড়িত এটা ফলনৰ বিষয়ে কিছু কথা আলোচনা কৰি লওঁহক। ধৰা হ’ল, স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ সংহতিটোৰ ওপৰত ‘Col’ এটা এনেকুৱা ফলন, যাতে

$$\text{Col}(n) = ৩n + ১, \text{ যদিহে } n \text{ এটা অযুগ্ম স্বাভাৱিক সংখ্যা আৰু}$$

$$\text{Col}(n) = n/২, \text{ যদিহে } n \text{ এটা যুগ্ম স্বাভাৱিক সংখ্যা।}$$

গতিকে,

$$n = ১ \text{ হ’লে } \text{Col}(n) = ৪,$$
$$n = ২ \text{ হ’লে } \text{Col}(n) = ১, \text{ ইত্যাদি।}$$

প্ৰথম কেইটামান স্বাভাৱিক সংখ্যা n ৰ বাবে $\text{Col}(n)$ ৰ মান ১ নং তালিকাত দেখুওৱা হৈছে।

n	১	২	৩	৪	৫	৬	৭	৮	৯	১০	১১	১২	১৩	১৪	১৫	১৬	১৭	১৮	১৯	২০
Col(n)	৪	১	১০	২	১৬	৩	২২	৪	২৮	৫	৩৪	৬	৪০	৭	৪৬	৮	৫২	৯	৫৮	১৯

তালিকা - ১

n	১	২	৩	৪	৫	৬	৭	৮	৯	১০
Col(n)	৪	১	১০	২	১৬	৩	২২	৪	২৮	৫
$\text{Col}^{২}(n)$	২	৪	৫	১	৮	১০	১১	২	১৪	১৬
$\text{Col}^{৩}(n)$	১	২	১৬	৪	৪	৫	৩৪	১	৭	৮
$\text{Col}^{৪}(n)$	৪	১	৮	২	২	১৬	১৭	৪	২২	৪
$\text{Col}^{৫}(n)$	২	৪	৪	১	১	৮	৫২	২	১১	২
$\text{Col}^{৬}(n)$	১	২	২	৪	৪	৪	২৬	১	৩৪	১
$\text{Col}^{৭}(n)$	৪	১	১	২	২	২	১৩	৪	১৭	৪

তালিকা - ২

এতিয়া এই ক'লাৎজ ফলনৰ পুনৰাবৃত্তসমূহ (iterate) বিবেচনা কৰা হওক, য'ত নিৰ্দিষ্ট স্বাভাৱিক সংখ্যা n ৰ বাবে Col ফলনৰ output টোক পৰৱৰ্তী পৰ্যায়ত input হিচাপে লৈ আকৌ Col ফলনৰ মান নিৰ্ণয় কৰা হয়। অৰ্থাৎ,

$$\begin{aligned}\text{Col}^{২}(n) &= \text{Col}(\text{Col}(n)),\\ \text{Col}^{৩}(n) &= \text{Col}(\text{Col}(\text{Col}(n))),\ \text{ইত্যাদি।}\end{aligned}$$

প্ৰথম কেইটামান স্বাভাৱিক সংখ্যা n ৰ বাবে, Col(n) আৰু Col(n) ৰ কেইটামান পুনৰাবৃত্তৰ মান ২ নং তালিকাত দেখুওৱা হৈছে।

এই ক'লাৎজ পুনৰাবৃত্তসমূহেৰে প্ৰতিটো স্বাভাৱিক সংখ্যা n য়ে একো একোটা ক'লাৎজ অনুক্ৰম বা ক'লাৎজ কক্ষপথৰ সৃষ্টি কৰে (n, Col(n), $\text{Col}^{২}(n)$, $\text{Col}^{৩}(n)$,...)। উদাহৰণস্বৰূপে, $n=১$ য়ে তলৰ পৰ্যায়ক্ৰমিক ক'লাৎজ অনুক্ৰমটোৰ সৃষ্টি কৰে:

$$(১, ৪, ২, ১, ৪, ২, ১, ৪, \ldots)$$

ক'লাৎজ অনুক্ৰমৰ বিষয়ে অতি গুৰুত্বপূৰ্ণ কথা এটা হ'ল এই যে, যদি এটা ক'লাৎজ অনুক্ৰমে কোনো এটা স্থানত ১ মানটো লয়, তেন্তে তাৰ পিছত অনুক্ৰমটোৱে অসীম সংখ্যকবাৰ ১, ৪, ২ ৰ চক্ৰ (cycle) এটাৰ মাজেৰে ঘূৰি থাকে। উদাহৰণস্বৰূপে, $n=৬$ য়ে এই ক'লাৎজ অনুক্ৰমটো সৃষ্টি কৰে: $(৬, ৩, ১০, ৫, ১৬, ৮, ৪, ২, ১, ৪, ২, ১, ৪, ২, ১, \ldots)$।

মেঘত হিমকণাসমূহ যেনেকৈ এবাৰ ওপৰলৈ এবাৰ তললৈ জপিয়াই থাকে, ক'লাৎজ অনুক্ৰমবোৰৰ সংখ্যাবোৰেও অনুৰূপ ধৰণে হ্ৰাস আৰু বৃদ্ধি প্ৰদৰ্শন কৰে বাবে ক'লাৎজ অনুক্ৰমবোৰক Hailstone অনুক্ৰম আৰু অনুক্ৰমটোৰ সংখ্যাবোৰক Hailstone সংখ্যা বা Wondrous সংখ্যা বুলিও জনা যায়। সংখ্যাবোৰৰ বঢ়া-টুটাৰ এই কথাটো $n = ২৭$ ল'লে পোৱা এই ক'লাৎজ অনুক্ৰমটোৰ পৰা বুজিব পৰা যাব: $(২৭, ৮২, ৪১, \ldots)$। কিন্তু অৱশেষত এই হিমকণাবোৰ আহি মাটিত পৰিবই, ইয়াৰ কোনো গত্যন্তৰ নাই। ক'লাৎজ অনুমানটোও ঠিক এনেকুৱাই।

ক'লাৎজ অনুমানত কোৱা হৈছে, "প্ৰতিটো ক'লাৎজ অনুক্ৰমে অৱশেষত ১ মানটো লাভ কৰে।" অনুমানটোৰ সম্পৰ্কত প্ৰকাশ হোৱা শতাধিক গৱেষণা-পত্ৰ আৰু অপ্ৰকাশিত বহু কামৰ সত্বেও আজিও ইয়াৰ সৰ্বশেষ সমাধান ওলোৱা নাই। গণিতজ্ঞ শ্বিজুও কাকুটানিয়ে (Shizuo Kakutani) এই অনুমানটোৰ বিষয়ে কৈছিল, "প্ৰায় এমাহৰ বাবে য়েল(বিশ্ববিদ্যালয়)ৰ সকলোৱে এইটোৰ সম্পৰ্কত কাম কৰিছিল, কিন্তু একো ফলাফল ওলোৱা নাছিল। সদৃশ পৰিঘটনা এটা হৈছিল যেতিয়া মই চিকাগো বিশ্ববিদ্যালয়ত এইটোৰ কথা উল্লেখ কৰিছিলোঁ। এটা কৌতুকৰ সৃষ্টি হৈছিল যে এই সমস্যাটো হৈছে আমেৰিকা যুক্তৰাষ্ট্ৰত গাণিতিক গৱেষণাক মন্থৰিত কৰাৰ উদ্দেশ্যে কৰা এক ষড়যন্ত্ৰৰ অংশবিশেষ।"

সহজ ভাষাত, ক'লাৎজ অনুমানটোৰ মূল কথাখিনি এনেদৰে ক'ব পাৰি যে, আপুনি যিকোনো এটা সংখ্যা লওক; যদি সংখ্যাটো অযুগ্ম তেন্তে সংখ্যাটোক তিনিগুণ কৰি এক যোগ কৰক, আৰু যদি সংখ্যাটো যুগ্ম তেন্তে ইয়াক আধা কৰক। এই প্ৰক্ৰিয়াটো চলাই থাকক আৰু অৱশেষত আপুনি ১ সংখ্যাটো পাব। অনুমানটোৰ

বিষয়ে এইখিনি কথা জনাৰ পাছত এনেকুৱা লাগে যেন এয়া কেৱল গাণিতিক উৎসুকতা, যাৰ বাস্তৱ পৃথিৱীত কোনো প্ৰায়োগিক গুৰুত্ব নাই! তেন্তে কিয়নো ইয়াৰ সমাধান বিচাৰি থকা হৈছে! কাৰণসমূহ এনেকুৱা:

ক) ই এটা বিশুদ্ধ বৌদ্ধিক প্ৰত্যাহ্বান,

খ) সংখ্যাতত্ত্বক আমি কিমান দূৰলৈ বুজিব পাৰিছো এয়া তাৰেও মাপকাঠী,

গ) এইটো সমাধান বা প্ৰমাণ কৰিবলৈ চেষ্টা কৰি থাকোঁতে গণিতৰ অন্যান্য শাখাসমূহৰ সৈতে উদ্ভৱ হোৱা সম্পৰ্ক,

ঘ) গতিশীল প্ৰণালীৰ (dynamical system) ই এটা সৰল অথচ গুৰুত্বপূৰ্ণ আৰ্হি।

অৱশ্যে সমাধান কৰোঁতালৈ ইতিমধ্যে ঘোষণা কৰি থোৱা পুৰস্কাৰৰ ধনৰাশিকো ওপৰৰ এটা কাৰণ হিচাপে অন্তৰ্ভুক্ত কৰিব পাৰি। এই পুৰস্কাৰসমূহৰ ভিতৰত আছে ৰ'য়েল চ'ছাইটিৰ সভ্য হেৰল্ড কক্সেটাৰৰ (Harold Coxeter) ৫০ ডলাৰ, গণিতজ্ঞ পল এয়াৰডছৰ (Paul Erdos) ৫০০ ডলাৰ, আৰু ছাৰ ব্ৰায়ান থ্ৱেইটছৰ (Sir Bryan Thwaites) ১০০০ ইউৰো ধনৰাশি, ইত্যাদি।

গণিতৰ ভাষাত ক'বলৈ হ'লে গতিশীল (বিচ্ছিন্ন) প্ৰণালী এটা হ'ল এটা অৱস্থা ক্ষেত্ৰ (state space) X, যাৰ ওপৰত সংজ্ঞাবদ্ধ হৈ থাকে এটা স্থানান্তৰ ফলন (shift map) T, অৰ্থাৎ T ফলনটো X ৰ পৰা X লৈ। $T, T^২, T^৩, \ldots$ আদি পুনৰাবৃত্তসমূহে প্ৰণালীটোৰ গতিতত্ত্বক ব্যাখ্যা কৰে। ক'লাৎজ গতিশীল প্ৰণালীত অৱস্থা ক্ষেত্ৰসমূহ হ'ল স্বাভাৱিক সংখ্যাসমূহ $\{১, ২, ৩, \ldots\}$, আৰু স্থানান্তৰ ফলনটো হ'ল ওপৰত উল্লেখিত Col ফলন। বিচ্ছিন্ন গতিশীল প্ৰণালীসমূহৰ সহোদৰ হৈছে নিৰৱচ্ছিন্ন গতিশীল প্ৰণালী, য'ত গতিতত্ত্বসমূহ সূচোৱা হয় সাধাৰণ অৱকলজীয় সমীকৰণ বা আংশিক অৱকলজীয় সমীকৰণেৰে। পৰিস্থিতি তন্ত্ৰ, জলবায়ু আদিৰ দৰে বাস্তৱ জীৱনৰ বহু গুৰুত্বপূৰ্ণ প্ৰণালীক নিৰৱচ্ছিন্ন গতিশীল প্ৰণালী হিচাপে অধ্যয়ন কৰিব পৰা যায়। ক'লাৎজ অনুমানে এই কথাটোতো আলোকপাত কৰে যে বৰ সৰল যেন লগা সমীকৰণেও অভাৱনীয় ৰূপত জটিল প্ৰণালীৰ সৃষ্টি কৰিব পাৰে।

এতিয়া আহিছোঁ সমাধানৰ কথালৈ। আমি যেতিয়া গণিতৰ কোনো এটা সমস্যা সম্পূৰ্ণৰূপে সমাধান কৰিব নোৱাৰো, তেতিয়া আমি ইয়াৰ আংশিক ফলাফলসমূহলৈ মনোযোগ দিও। যদিও এই আংশিক ফলাফলসমূহে আমাক সম্পূৰ্ণ সমাধানৰ ফালে আগুৱাই নিনিয়ে তথাপি প্ৰায়েই এইবিলাকে সমস্যাটোৰ বিষয়ে কিছু অন্তৰ্দৃষ্টি প্ৰদান কৰে। কেতিয়াবা সমাধানৰ ক্ষেত্ৰত থকা বাধাসমূহ (obstructions) চিনাক্তকৰণেও আমাক এটা সিদ্ধান্তৰ ফালে অগ্ৰসৰ হোৱাত সহায় কৰে। এটা সমস্যাৰ লগত সম্পৰ্কিত আন সমস্যাসমূহৰ প্ৰতিউদাহৰণসমূহে (counterexample) আমাক মূল সমস্যাটোৰ সমাধানৰ ক্ষেত্ৰত থাকিব পৰা জটিলতাৰ বিষয়ে অৱগত কৰাব পাৰে। ক'লাৎজ অনুমানৰ কেইটামান গুৰুত্বপূৰ্ণ আংশিক ফলাফল আৰু বাধাৰ বিষয়ে তলত আলোচনা কৰা হ'ল।

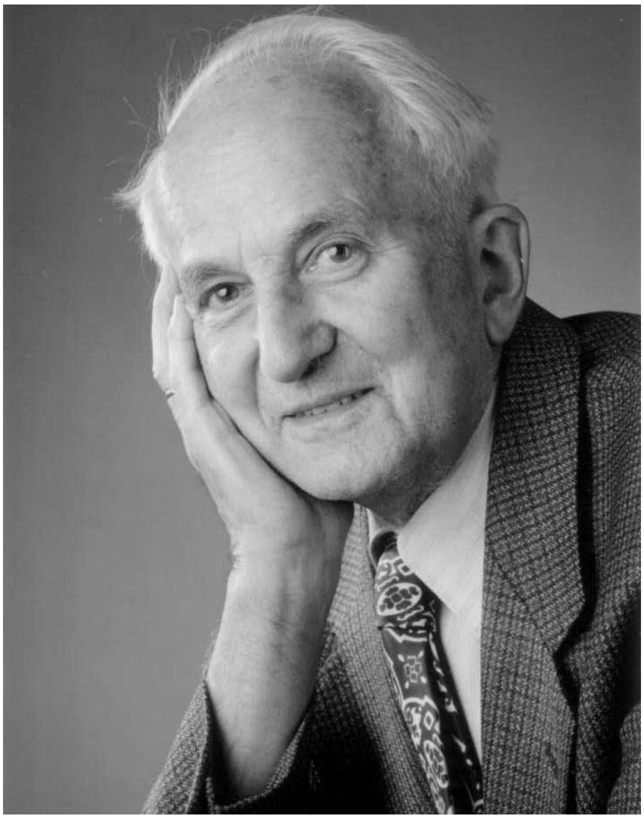
২০১৭ চনত এটা সংগণন প্ৰকল্পত (computing project) আৰম্ভণি, মানে ১ৰ পৰা $১০^{২০}$ লৈ আটাইবোৰ স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ কাৰণে এই অনুমানটোৰ সত্যতা নিৰূপণ কৰা হৈছে। গতিকে, সাধাৰণভাৱে কাগজ কলম লৈ এটা প্ৰতিউদাহৰণ বিচাৰি পোৱাৰ সম্ভাৱনা তেনেই ক্ষীণ। আনহাতে, যদি $১, ২, ৪, ১, \ldots$ এই চক্ৰটোৰ বাহিৰে অন্য এটা অসীমভাৱে পুনৰাবৃত্তি হোৱা চক্ৰ পোৱা যায়, তেতিয়াও আমি এই অনুমানটোৰ বিপক্ষে ক'ব পৰা অৱস্থা এটালৈ আহিব পাৰোঁ। আকৌ, ১৯৯৩ চনত শ্ব'লোম এলিয়াহোয়ে (Shalom Eliahou) দেখুৱাইছিল যে এনেকুৱা এটা চক্ৰৰ ন্যূনতম দৈৰ্ঘ্য হ'ব লাগিব ১৭,০৮৭,৯১৫ । গতিকে, অনুমানটোৰ বিপক্ষে যোৱাকৈ কোনেও সহজতে এটা চুটি চক্ৰ পাব নোৱাৰে। বাধাসমূহৰ ভিতৰত এটা হ'ল ক'লাৎজ সদৃশ অনুক্ৰমত এনেকুৱা চক্ৰৰ উপস্থিতি। উদাহৰণস্বৰূপে, যদি আমি Col ফলনটোত অযুগ্ম সংখ্যাবোৰক $৩n+১$ ৰ সলনি $৩n-১$ ৰ সৈতে সংজ্ঞাবদ্ধ কৰো, তেন্তে এই নতুন অনুক্ৰমবোৰত আমি আন দুটা অসীম চক্ৰ দেখিবলৈ পাওঁ, আৰু ইয়াৰ বাহিৰে অন্য অসীম চক্ৰ আছে নে নাই এইবিষয়ে জনা নাযায়। অৱশ্যে এই বাধাটোৱে আমাক দেখুৱায় যে ক'লাৎজ অনুমানৰ প্ৰমাণৰ কোনো এটা স্তৰত $৩n+১$ ফলনৰ এনে এটা ধৰ্ম ব্যৱহৃত হ'ব, যিটো $৩n-১$ ফলনে মানি নচলে। এই তাৎপৰ্যপূৰ্ণ ক'লাৎজ চক্ৰসমূহৰ অনুপস্থিতিয়ে সংখ্যাতত্ত্বৰ দুৰূঢ় উপপাদ্য এটাৰ ফালে সূচায়। উপপাদ্যটো হৈছে, "২ৰ ঘাত(power) আৰু ৩ৰ ঘাতৰ মাজৰ পাৰ্থক্যই ক্ৰমান্বয়ে অসীমলৈ গতি কৰে।" যদি ২ৰ ঘাত এটা আৰু ৩ৰ ঘাত এটা খুব ওচৰা-ওচৰিকৈ থাকে, তেন্তে ইহঁতক এটা ক'লাৎজ চক্ৰ সৃষ্টি কৰাৰ কাৰণে ব্যৱহাৰ কৰিব পাৰি। অৱশ্যে ওপৰৰ উপপাদ্যটো সত্য বুলি জনা গৈছে। বেকাৰৰ উপপাদ্য বুলি জনাজাত গভীৰ ফলাফল এটাৰে এই জটিল প্ৰমাণটো কৰিব পাৰি। উল্লেখ্য যে এই বেকাৰৰ উপপাদ্যৰ কাৰণেই এলান বেকাৰে (Alan Baker) ১৯৭০ চনত সন্মানীয় ফিল্ডছ্ মেডেল লাভ কৰিছিল। গতিকে প্ৰতীয়মান হয় যে ক'লাৎজ অনুমান সমাধান কৰা কাৰ্য্য বেকাৰৰ উপপাদ্য প্ৰমাণ কৰাতকৈ কোনোগুণেই সহজ নহয়।

অৱশ্যে কোনোবাই এই গণনাখিনি বিপৰীতফালৰ পৰাও কৰিব পাৰে আৰু দেখুৱাব পাৰে যে ক'লাৎজ পুনৰাবৃত্তিৰ যোগেদি বহু

সংখ্যাক অৱশেষত ১ লৈ পঠিয়াব পাৰি। কম্পিউটাৰৰ সহায়ত কৰা এটা প্ৰমাণৰ যোগেদি ২০০৩ চনত ইলিয়া ক্ৰেচিক'ভ (Ilia Krasikov) আৰু জেফ্ৰি ক্লাৰ্ক লেগেৰিয়াছয়ে (Jeffrey Clark Lagarias) দেখুৱাইছিল যে কোনো এটা ডাঙৰ সংখ্যা x ৰ বাবে, ১ আৰু x ৰ মাজত অন্ততঃ $x^{০.৮৪}$ টা n ৰ আৰম্ভণি মান পোৱা যায় যাৰ ক'লাৎজ পুনৰাবৃত্তিয়ে অৱশেষত ১ মানটো লয়। ১৯৮৭ চনত জন হৰ্টন কনৱে'য়ে (John Horton Conway) ফ্ৰেক্ট্ৰাণ (FRACTRAN) নামৰ এবিধ নতুন কম্পিউটাৰৰ ভাষা উদ্ভাৱন কৰিছিল, য'ত প্ৰতিটো প্ৰগ্ৰাম আছিল ক'লাৎজ ফলন Col ৰ ভিন্নৰূপ (variant)। এই অনুক্ৰমবিলাকৰ outputসমূহ গাণিতিক গণনা কৰাৰ অৰ্থে ব্যৱহাৰ কৰিব পৰা গৈছিল। উদাহৰণস্বৰূপে, Prime নামৰ ফ্ৰেক্ট্ৰাণ প্ৰগ্ৰামটোৱে কোনো স্বাভাৱিক সংখ্যা n ক Prime(n) ৰ সৈতে সংজ্ঞাবদ্ধ কৰে, য'ত Prime(n) ৰ মান হ'ল তলত দিয়া ধৰণৰ:

- ১৭n/৯১, যদিহে n সংখ্যাটো ৯১ৰে বিভাজ্য, অন্যথা
- ৭৮n/৮৫, যদিহে n সংখ্যাটো ৮৫ৰে বিভাজ্য, অন্যথা
- ১৯n/৫১, যদিহে n সংখ্যাটো ৫১ৰে বিভাজ্য, অন্যথা
- ২৩n/৩৮, যদিহে n সংখ্যাটো ৩৮ৰে বিভাজ্য, অন্যথা
- ২৯n/৩৩, যদিহে n সংখ্যাটো ৩৩ৰে বিভাজ্য, অন্যথা
- ৭৭n/২৯, যদিহে n সংখ্যাটো ২৯ৰে বিভাজ্য, অন্যথা
- ৯৫n/২৩, যদিহে n সংখ্যাটো ২৩ৰে বিভাজ্য, অন্যথা
- ৭৭n/১৯, যদিহে n সংখ্যাটো ১৯ৰে বিভাজ্য, অন্যথা
- n/১৭, যদিহে n সংখ্যাটো ১৭ৰে বিভাজ্য, অন্যথা
- ১১n/১৩, যদিহে n সংখ্যাটো ১৩ৰে বিভাজ্য, অন্যথা
- ১৩n/১১, যদিহে n সংখ্যাটো ১১ৰে বিভাজ্য, অন্যথা
- ১৫n/২, যদিহে n সংখ্যাটো ২ৰে বিভাজ্য, অন্যথা
- n/৭, যদিহে n সংখ্যাটো ৭ৰে বিভাজ্য, অন্যথা
- ৫৫n

মন কৰিবলগীয়া কথা এটা হ'ল, এই Prime program ত ২ ৰ কক্ষপথটোৱে অৰ্থাৎ ২, Prime(২), Prime^{২}(২), Prime^{৩}(২), ইত্যাদিয়ে ২ ৰ ২^{p} ঘাতসমূহৰ মান লয়, যাৰ সূচকসমূহ মৌলিক সংখ্যা (অৱশ্যে ইয়াত বহু মান এনেকুৱাও আছে যিসমূহ ২ৰ ঘাত নহয়)। এই ফ্ৰেক্ট্ৰাণ প্ৰগ্ৰামটোৱে মৌলিক সংখ্যাসমূহ গণনা কৰি উলিয়ায়। কাৰ্যতঃ, ফ্ৰেক্ট্ৰাণ ভাষাটো 'টিউৰিং সম্পূৰ্ণ' (Turing Complete)। চমুকৈ ক'বলৈ গ'লে কথাটো এনেকুৱা যে এটা সাধাৰণ কম্পিউটাৰৰ সহায়ত কৰিব পৰা যিকোনো গণনাকাৰ্য একোটা ফ্ৰেক্ট্ৰাণ প্ৰগ্ৰামৰ সহায়ত কৰিব পৰা যায়। ফ্ৰেক্ট্ৰাণ প্ৰগ্ৰাম আৰু ক'লাৎজ অনুমান সম্পৰ্কীয় এটা বাধা হ'ল এই যে কিছুমান এনেকুৱা ফ্ৰেক্ট্ৰাণ প্ৰগ্ৰাম অনুক্ৰম আছে, যাৰ ক্ষেত্ৰত এইটো সিদ্ধান্তত উপনীত হ'ব নোৱাৰি যে এই অনুক্ৰমবোৰে একোটা নিৰ্দিষ্ট লক্ষ্য মান (target value) লাভ কৰে নে নাই। টিউৰিং মেচিনৰ Halting Problem ৰ ক্ষেত্ৰত একো সিদ্ধান্ত ল'ব নোৱৰা ঘটনাটোৰ সৈতে ই সম্পৰ্কিত। এই বাধাখিনিয়ে সূচায় যে অনুমানটোৰ লগত জড়িত হৈ থকা সকলো প্ৰশ্ন সমাধা কৰিব পৰাকৈ কোনো সাধাৰণ এলগ'ৰিদম নাই। অনুমানটোৰ যিকোনো সমাধানে ক'লাৎজ ফলন Col ৰ কিছুমান বিশেষ ধৰ্ম ব্যৱহাৰ কৰিব লাগিব যিসমূহ সাধাৰণ ফ্ৰেক্ট্ৰাণ প্ৰগ্ৰামসমূহে মানি নচলে।



আমাক পতিয়ন নিয়াব পৰাকৈ heuristic যুক্তি(argument)ৰ ওপৰত আধাৰিত আন এটা আংশিক ফলাফল আছে যিয়ে ক'লাৎজ অনুমানৰ সত্যতা পূৰ্বানুমান কৰে। যুক্তিটো এনেধৰণৰ: আমি জানোঁ যে Col ফলনে এটা অযুগ্ম সংখ্যা n ক এটা তুলনামূলকভাৱে ডাঙৰ সংখ্যা ৩n+১ লৈ নিয়ে। নিশ্চিতভাৱে এই ৩n + ১ সংখ্যাটো এটা যুগ্ম সংখ্যা। গতিকে, ইয়াৰ ওপৰত Col ফলনৰ পৰৱৰ্তী কাৰ্য হ'ব ২ ৰে হৰণ কৰা।

$$n \to ৩n + ১ \to (৩n + ১)/২$$

Heuristic ভাৱে, ৫০ শতাংশ সম্ভাৱনা থাকে $(৩n + ১)/২$ সংখ্যাটো যুগ্ম হোৱাৰ, আৰু পৰৱৰ্তী Col ফলনে তাক পুনৰ ২ ৰে হৰণ কৰাৰ। এটা সম্ভাৱিতা তত্ত্বৰ গণনাই দেখুৱাইছে যে এটা অযুগ্ম সংখ্যা পোৱাৰ আগতে প্ৰায় (expected value) দুবাৰ ২ ৰে হৰণ কৰিব পৰা যায়।

$$n \to ৩n + ১ \to (৩n + ১)/২ \to (৩n + ১)/৪$$

গতিকে, যদিহে এটা অযুগ্ম সংখ্যা n ৰ পৰা আৰম্ভ কৰা হয়, তেন্তে ক'লাৎজ অনুক্ৰমটোত পৰৱৰ্তী অযুগ্ম সংখ্যাটো গড় হিচাপত প্ৰায় $৩n/৪$ হ'ব বুলি আশা কৰিব পাৰি। এইদৰে, অনুক্ৰমটোত অযুগ্ম সংখ্যাৰ গড় মান কমি কমি ১ৰ ফালে ধাৱমান হ'ব, যিটোৱে ক'লাৎজ অনুমানৰ শুদ্ধতাক সমৰ্থন কৰে। এই heuristicটোৱে পূৰ্বানুমান কৰে যে ক'লাৎজ ফলনৰ কিছু ভিন্নৰূপ, যেনে $৫n + ১$ ফলনৰ কাৰণে এনে কক্ষপথ থাকিব যিসমূহে অসীমলৈ গতি কৰে। $৫n + ১$ ফলনৰ কাৰণে পোৱা সাংখ্যিক মানসমূহেও কক্ষপথৰ এই কথাখিনিক সমৰ্থন কৰা যেন লাগে। উদাহৰণস্বৰূপে, $n = ৭$ ৰ কাৰণে $৫n + ১$ ফলনৰ (যুগ্ম সংখ্যাৰ কাৰণে $৩n + ১$ ফলনৰ সৈতে একে) পুনৰাবৃত্তসমূহ হ'ব: ৭, ৩৬, ১৮, ৯, ৪৬, ২৩, ১১৬, ৫৮, ২৯, ১৪৬, ৭৩, ৩৬৬, ১৮৩, ৯১৬, ৪৫৮, ২২৯, ১১৪৬, ৫৭৩, ২৮৬৬, ১৪৩৩, ৭১৬৬, ৩৫৮৩, ১৭৯১৬, . . . ইত্যাদি।

পৰিসংখ্যা বিজ্ঞানৰ সহায়ত অধ্যয়ন কৰিলে এই heuristicখিনিও কিছু আংশিক ফলাফললৈ ৰূপান্তৰ কৰিব পৰা যায়। 'সকলোবোৰ (all) ক'লাৎজ কক্ষপথৰ গতি-প্ৰকৃতি (behavior) অধ্যয়ন কৰাৰ সলনি 'প্ৰায় সকলোবোৰ' (almost all) ক'লাৎজ অনুক্ৰমৰ গতি-প্ৰকৃতি অধ্যয়ন কৰি এই আংশিক ফলাফলসমূহ পাব পাৰি (এই অধ্যয়নত এটা নিৰ্দিষ্ট সম্ভাৱনা ঘনত্বৰ তলৰ বা খুব কম সংখ্যকবাৰ আবিৰ্ভাৱ হোৱা ক'লাৎজ অনুক্ৰমসমূহ আওতাৰ বাহিৰত ৰখা হয়)। ১৯৭৬ চনত ৰিহো টেৰাছে (Riho Terras) দেখুৱাইছিল যে n ৰ 'প্ৰায় সকলোবোৰ' আৰম্ভণি মান অৱশেষত n তকৈ সৰু মানলৈ পুনৰাবৃত্ত হয়। ইয়াৰ পাছত যদি কোনোবাই এইটো দেখুৱাব পাৰে যে n ৰ 'সকলোবোৰ' আৰম্ভণি মানেই n তকৈ সৰু মান এটালৈ পুনৰাবৃত্ত হয়, তেন্তে এই ফলাফলটোৰ পুনঃ পুনঃ ব্যৱহাৰৰ দ্বাৰা আমি ক'লাৎজ অনুমানৰ সত্যতা প্ৰমাণ কৰিব পাৰোঁ। টেৰাছৰ এই ফলাফলটোৰ পথেৰেই বছৰৰ পাছত বছৰ ধৰি বহুজনে আগুৱাবলৈ চেষ্টা কৰি আছে। ১৯৭৯ চনত জ্য পল এল্যুচে (Jean Paul Allouche) দেখুৱালে যে n ৰ প্ৰায় সকলোবোৰ আৰম্ভণি মানেই অৱশেষত $n^{০.৮৬৯}$ তকৈ সৰু মান এটালৈ পুনৰাবৃত্ত হয়। ১৯৯৪ চনত আইভান ক'ৰেকে (Ivan Korec) এই সীমাটো $n^{০.৭৯২৫}$ লৈ কমাই আনে। ২০১৯ চনত টেৰেন্স টাৱে দেখুৱায় যে, যিবোৰ ফলন f যে অতি মন্থৰ গতিত হ'লেও, ক্ৰমাৎ অসীমলৈ বৃদ্ধি হয়, সেইবোৰ ফলন f ৰ বাবে, n ৰ প্ৰায় সকলোবোৰ আৰম্ভণি মানেই অৱশেষত $f(n)$ তকৈ সৰু মান এটালৈ পুনৰাবৃত্ত হয়। অৰ্থাৎ, "প্ৰায় সকলোবোৰ ক'লাৎজ কক্ষপথেই প্ৰায় সীমাবদ্ধ মানহে গ্ৰহণ কৰে।" উদাহৰণস্বৰূপে, n ৰ প্ৰায় সকলোবোৰ আৰম্ভণি মানেই অৱশেষত $\log(\log(\log(\log(n))))$ তকৈ সৰু মান এটালৈ পুনৰাবৃত্ত হয়। টাওৰ এই কামখিনিৰ বিষয়ে কোৱাণ্টা (Quanta) আলোচনীয়ে এই বুলি লিখিছিল যে বহু দশকৰ ভিতৰত ক'লাৎজ অনুমানৰ বিষয়ে পোহৰলৈ অহা গুৰুত্বপূৰ্ণ ফলাফলসমূহৰ ভিতৰত এইবোৰ অন্যতম ("Tao came away with one of the most significant results on the Collatz conjecture in decades.")। অনুমানটো প্ৰত্যক্ষভাৱে সমাধান নকৰাকৈ আমি অনুমানটোৰ ইমানখিনি ওচৰলৈকে যাব পাৰোঁ। দুৰ্ভাগ্যক্ৰমে, প্ৰমাণটোত ব্যৱহাৰ হোৱা পৰিসাংখ্যিক পদ্ধতিবোৰেৰে এতিয়ালৈকে ক'লাৎজ অনুমানটোৰ সৰ্বশেষ সমাধান এটা পাব পৰা হোৱা নাই। আগতেই কোৱা হৈছে যে ক'লাৎজ অনুমান হৈছে গতিশীল প্ৰণালী এটাৰ সৰল আৰ্হি। সেয়েহে এয়া সহজে অনুমেয় যে অন্যান্য গতিশীল প্ৰণালীৰ বাবে ব্যৱহৃত উপপাদ্য আৰু ফলাফলবোৰৰ প্ৰভাৱ ক'লাৎজ অনুমানৰ এই অধ্যয়নসমূহৰ ওপৰতো আছে। উদাহৰণস্বৰূপে, অৰৈখিক শ্ৰু'ডিংগাৰ (Schrödinger) সমীকৰণৰ বাবে এটা অপৰিৱৰ্তনীয় জোখ (invariant measure) গঠন কৰাৰ বিষয়ে ১৯৯৪ চনত জন বৰ্গেইনে (Jean Bourgain) দিয়া ফলাফল এটাৰ সুস্পষ্ট প্ৰভাৱ ক'লাৎজ অনুমানৰ বিষয়ে এইমাত্ৰ আলোচনা কৰা যুক্তিখিনিৰ ওপৰত আছে। ক'লাৎজ পুনৰাবৃত্তিৰ এটা সমস্যা হ'ল যে সংখ্যাসমূহৰ বিতৰণক ই অধিক পৰিমাণে বিকৃত কৰে। গতিকে, অধিক পুনৰাবৃত্তিৰ লগে লগে অনুক্ৰমৰ মানসমূহৰ পৰিসাংখ্যিক আচৰণ অধ্যয়নৰ আয়ত্তৰ বাহিৰলৈ গুচি যায়। শেহতীয়াকৈ টেৰেন্স টাৱে এটা অপৰিৱৰ্তনীয় জোখ, অৰ্থাৎ সংখ্যাসমূহৰ এটা বিতৰণ (distribution) গঠন কৰিবলৈ সক্ষম হৈছে, যিসমূহে নিজৰ ক্ষুদ্ৰতৰ সংস্কৰণ এটালৈ নিজকে পুনৰাবৃত্ত কৰে।

১৯৩৭ চনৰ পৰা এতিয়ালৈ প্ৰায় ৮৪ বছৰকাল এই বিখ্যাত অনুমানটোৱে গাণিতিক জগতৰ বহু সময়, বহু পৃষ্ঠা, আৰু বহু উৎসুক আৰু অনুসন্ধানী মনৰ চিন্তা দখল কৰি আহিছে। সম্পূৰ্ণ সমাধানৰ দুৱাৰ পাবলৈ ক'লাৎজ অনুমানে বৰ্তমান সময়ৰ গণিত আৰু গণিতজ্ঞসকলৰ পৰা আৰু কিমান অন্বেষণ আশা কৰে, সেয়া মাথোঁ অনাগত সময়েহে ক'ব পাৰিব। সম্ভৱতঃ এয়া অনুমান কৰিয়েই গণিতজ্ঞ পল এৰড'চে এবাৰ ক'লাৎজ অনুমানৰ বিষয়ে কৈছিল, "এনেকুৱা সমস্যাৰ কাৰণে গণিতশাস্ত্ৰ এতিয়াও সাজু হৈ নুঠিবও পাৰে।"

[টেৰেন্স টাওৰ এটি বক্তৃতাৰ আলমত।]